

باسمه تالی

سؤالات امتحان هماهنگ درس : حساب دیفرانسیل و انتگرال (۲)	رشته : علوم ریاضی	ساعت شروع : ۱۰:۳۰ صبح	مدت امتحان : ۱۲۰ دقیقه
دوره ی پیش دانشگاهی	« ۲۰ نمره ای »	تاریخ امتحان : ۸ / ۴ / ۱۳۸۸	
دانش آموزان و داوطلبان آزاد سراسر کشور در جبرانی دوم سال ۸۸-۱۳۸۷	اداره کل سنجش و ارزشیابی تحصیلی	http://aee.medu.ir	

ردیف	سؤالات	نمره
۱	معادله خط مماس بر منحنی $\sqrt{xy} + y^2 - 3x + \sqrt{x} = 0$ را در نقطه $(1,1)$ بنویسید .	۱
۲	اگر مشتق مرتبه دوم تابع $y = \text{Arc tan } x + ax^2$ در نقطه $x = 1$ برابر $\frac{3}{4}$ باشد ، مقدار a را محاسبه نمایید .	۱
۳	مقدار مشتق تابع معکوس $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3}$ را در نقطه ای به طول ۲ روی تابع معکوس به دست آورید .	۱
۴	ذره ای روی منحنی $x^2 + y^2 - xy - 7 = 0$ در حال حرکت است . اگر مؤلفه x آن با سرعت ۲ متر بر ثانیه افزایش یابد وقتی ذره به نقطه $(1,2)$ می رسد مؤلفه y آن با چه سرعتی تغییر می کند ؟	۱
۵	شرایط قضیه رول را برای تابع $f(x) = \sqrt{x - 2x^2}$ بر بازه $[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$ بررسی کنید و در صورت وجود ، c مذکور در قضیه را معین کنید .	۱/۵
۶	برای هر $x_1, x_2 \in [-1, 1]$ ثابت کنید : $ x_1 - x_2 \leq \text{Arc sin } x_1 - \text{Arc sin } x_2 $	۱/۵
۷	نقاط بحرانی تابع $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x} - \cos x$ را در $[0, 2\pi]$ تعیین کرده سپس با استفاده از آزمون مشتق دوم نوع اکسترمم نسبی نقاط را مشخص کنید .	۱/۵
۸	اگر $f(x) = ax^3 + bx^2 + c$ ، a و b و c را طوری بیابید که f در نقطه $(1,1)$ عطف داشته و شیب خط مماس در نقطه عطف آن ، -1 باشد .	۲
۹	جدول تغییرات و نمودار تابع مقابل را در $[0, 2\pi]$ رسم کنید : $y = \frac{2}{\sin x + \cos x}$	۲
۱۰	با استفاده از قاعده هویتال حدود زیر را محاسبه کنید : الف) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$ ب) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \tan^4 t dt}{\sin^2 x}$	۱/۲۵
۱۱	با استفاده از دیفرانسیل مقدار تقریبی $\sin(1.34^\circ)$ را بیابید .	۰/۷۵
۱۲	برای $f(x) = \begin{cases} 5 & x \in Q \\ 3 & x \notin Q \end{cases}$ مجموع بالا و پائین ریمان را در بازه $[-1, 1]$ پیدا کنید . آیا این تابع در بازه $[-1, 1]$ انتگرال پذیر است ؟ چرا ؟	۱/۲۵
۱۳	قضیه : اگر $f(x)$ در $[a, b]$ انتگرال پذیر و λ یک عدد حقیقی باشد ، آنگاه : $\int_a^b \lambda f(x) dx = \lambda \int_a^b f(x) dx$	۱
۱۴	بدون انتگرال گیری ثابت کنید : $\frac{1}{28} \leq \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}} \frac{1}{1+x} dx \leq \frac{1}{9}$	۱/۲۵
۱۵	انتگرال های زیر را محاسبه کنید : الف) $\int_0^2 [x](x^2 + \sqrt{x} + 1) dx$ ب) $\int \frac{\sqrt{\ln x} dx}{x}$ ج) $\int x \cos x^2 \sin^{-1} x^2 dx$	۲
۲۰	جمع نمره	« موفق باشید »

باسمه تعالی

راهنمای تصحیح سؤالات امتحان هماهنگ درس: حساب دیفرانسیل و انتگرال (۲)	رشته: علوم ریاضی
دوره‌ی پیش دانشگاهی (۲۰ نمره ای)	تاریخ امتحان: ۱۳۸۸ / ۴ / ۱۸
دانش آموزان و داوطلبان آزاد سراسر کشور جبرانی دوم سال تحصیلی ۸۸-۱۳۸۷	اداره‌ی کل سنجش و ارزشیابی تحصیلی http://aee.medu.ir

ردیف	راهنمای تصحیح	نمره
۱	$f'(x,y) = \frac{f'_x}{f'_y} = \frac{\frac{y}{\sqrt{xy}} - 3 + \frac{1}{\sqrt{x}}}{\frac{x}{\sqrt{xy}} + 2y} \Rightarrow m = \frac{-\frac{1}{2} + 3 - \frac{1}{2}}{\frac{1}{2} + 2} = \frac{4}{5} \Rightarrow y - 1 = \frac{4}{5}(x - 1)$	۱
۲	$y' = \frac{1}{1+x^2} + 2ax \Rightarrow y'' = \frac{-2x}{(1+x^2)^2} + 2a \Rightarrow \frac{-1}{2} + 2a = \frac{3}{2} \Rightarrow a = 1 \quad (./25)$	۲
۳	$f'(x) = \frac{-1}{x^2} - \frac{3}{x^4} \Rightarrow f'(1) = -4 \quad (./25)$ $A \Big _2^a \frac{1}{a} + \frac{1}{a^3} = 2 \Rightarrow a = 1 \quad (./25) \quad (f^{-1})'(2) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{-1}{4} \quad (./25)$	۳
۴	$2x^2x' + 3y^2y' - x'y - xy' = 0 \Rightarrow 6 + 12y' - 4 - y' = 0 \Rightarrow 11y' = -2 \Rightarrow y' = \frac{-2}{11} m \quad (./25)$	۴
۵	<p>f در $[0, \frac{1}{2}]$ پیوسته $(./25)$ و بر $(0, \frac{1}{2})$ مشتق پذیر $(./25)$ است و $f(0) = f(\frac{1}{2}) = 0$ پس در شرایط قضیه رول صادق است $(./25)$ لذا: $c = \frac{1}{4} \in (0, \frac{1}{2}) \quad (./25)$</p> $\exists c \in (0, \frac{1}{2}) : f'(c) = 0 \Rightarrow \frac{1-4c}{2\sqrt{c-2c^2}} = 0 \Rightarrow c = \frac{1}{4} \quad (./25)$	۵
۶	<p>فرض کنیم $f(x) = \text{Arcsin } x$, $x_1 < x_2$, f بر $[-1, 1]$ پیوسته و بر $(-1, 1)$ مشتق پذیر است و لذا بر $[x_1, x_2]$ پیوسته و (x_1, x_2) مشتق پذیر است پس در شرایط قضیه مقدار میانگین صدق می کند لذا:</p> $\exists c \in (x_1, x_2) : f'(c) = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \quad (./25)$ $\frac{1}{\sqrt{1-c^2}} = \frac{\text{Arcsin } x_1 - \text{Arcsin } x_2}{x_1 - x_2} \Rightarrow \left \frac{1}{\sqrt{1-c^2}} \right = \left \frac{\text{Arcsin } x_1 - \text{Arcsin } x_2}{x_1 - x_2} \right \quad (./5)$ $-1 < c < 1 \Rightarrow 0 < c^2 < 1 \Rightarrow 0 < 1 - c^2 < 1 \Rightarrow 0 < \sqrt{1 - c^2} < 1 \Rightarrow 1 < \frac{1}{\sqrt{1 - c^2}} \Rightarrow$ $ x_1 - x_2 \leq \text{Arcsin } x_1 - \text{Arcsin } x_2 \quad (./25)$	۶

«ادامه در صفحه‌ی دوم»

باسمه تعالی

راهنمای تصحیح سوالات امتحان هماهنگ درس: حساب دیفرانسیل و انتگرال (۲)		رشته : علوم ریاضی
دوره‌ی پیش دانشگاهی (۲۰ نمره ای)		تاریخ امتحان : ۱۳۸۸ / ۴ / ۱۸
دانش آموزان و داوطلبان آزاد سراسر کشور جبرانی دوم سال تحصیلی ۸۸-۱۳۸۷		اداره‌ی کل سنجش و ارزشیابی تحصیلی http://aee.medu.ir
ردیف	راهنمای تصحیح	نمره
۷	$f'(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \sin x = 0 \rightarrow \sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x = \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4} \quad (0/5)$ $f''(x) = \cos x \quad (0/25)$ $f''(\frac{5\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2} < 0 \rightarrow \text{نسبی Max} \quad (0/25) \quad f''(\frac{7\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2} > 0 \rightarrow \text{نسبی Min} \quad (0/25)$	۱/۵
۸	$f'(x) = 3ax^2 + 2bx \Rightarrow f'(2) = -1 \Rightarrow 12a + 4b = -1 \quad (0/25)$ $f''(x) = 6ax + 2b \Rightarrow f''(2) = 0 \Rightarrow 12a + 2b = 0 \quad (0/25)$ $f(2) = 1 \Rightarrow 12a + 4b + c = 1 \quad (0/25) \Rightarrow a = \frac{1}{12}, b = -\frac{1}{2}, c = \frac{4}{3}$	۲
۹	<p>مجاذب های قائم</p> $\sin x + \cos x = 0 \Rightarrow \tan x = -1 \Rightarrow x = \frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4} \quad (0/5)$ $y' = \frac{2(\sin x - \cos x)}{(\sin x + \cos x)^2} = 0 \Rightarrow \sin x = \cos x \Rightarrow \tan x = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow y = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \\ x = \frac{5\pi}{4} \Rightarrow y = \frac{2}{-\sqrt{2}} = -\sqrt{2} \end{cases}$	۲
۱۰	<p>الف) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{6x} = \frac{0}{0} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{6} = 0 \quad (0/5)$</p> <p>ب) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 4x}{2 \sin x \cos x} = \frac{0}{0} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4(1 + \tan^2 4x)}{2 \cos 2x} = \frac{4}{2} = 2 \quad (0/75)$</p>	۱/۲۵
«ادامه در صفحه‌ی سوم»		

باسمه تعالی

راهنمای تصحیح سوالات امتحان هماهنگ درس: حساب دیفرانسیل و انتگرال (۲)		رشته : علوم ریاضی
دوره‌ی پیش دانشگاهی (۲۰ نمره ای)		تاریخ امتحان : ۱۳۸۸ / ۴ / ۱۸
دانش آموزان و داوطلبان آزاد سراسر کشور جبرانی دوم سال تحصیلی ۸۸-۱۳۸۷		اداره‌ی کل سنجش و ارزشیابی تحصیلی http://aee.medu.ir
ردیف	راهنمای تصحیح	نمره
۱۱	$f(x) = \sin x$, $x = ۱۳۵^\circ$, $\Delta x = -۱^\circ = -\frac{\pi}{۱۸۰}$, $f'(x) = \cos x$ (۰/۲۵) $f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x) \cdot \Delta x = \sin ۱۳۵^\circ + \cos ۱۳۵^\circ \times \left(-\frac{\pi}{۱۸۰}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\pi}{۱۸۰}$ (۰/۲۵)	۰/۲۵
۱۲	بنا به نتایج حاصل از خاصیت ارشمیدسی اعداد بازه دلخواه $[X_{k-1}, X_k]$ دارای حداقل یک عدد گویا و یک عدد گنگ است (۰/۲۵): $f(u_k) = ۵$, $f(l_k) = ۳$ (۰/۲۵) $\Delta x = \frac{۲}{n}$, $U_n(f) = \sum_{k=1}^n f(u_k) \Delta x = \frac{۲ \times ۵}{n} \sum_{k=1}^n ۱ = ۱۰$ (۰/۲۵) $L_n(f) = \sum_{k=1}^n f(l_k) \cdot \Delta x = \frac{۳ \times ۲}{n} \sum_{k=1}^n ۱ = ۶$ (۰/۲۵) $\lim_{n \rightarrow \infty} U_n(f) \neq \lim_{n \rightarrow \infty} L_n(f) \Rightarrow f$ انتگرال پذیر نیست (۰/۲۵)	۱/۲۵
۱۳	$\int_a^b \lambda f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} R_n(\lambda f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n (\lambda f)(c_k) \Delta x = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda \sum_{k=1}^n f(c_k) \Delta x$ (۰/۲۵) $= \lambda \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(c_k) \cdot \Delta x = \lambda \lim_{n \rightarrow \infty} R_n(f) = \lambda \int_a^b f(x) dx$ (۰/۲۵)	۱
۱۴	$f(x) = \frac{1}{1+x^۲}$ (۰/۲۵) , $f'(x) = \frac{-۲x^۲}{(1+x^۲)^۲} = ۰ \Rightarrow x = ۰$ غ ق (۰/۲۵) $[a, b] = [۲, ۳] \Rightarrow b - a = ۱$ نقاط بحرانی $\begin{cases} x = ۲ \rightarrow y = \frac{1}{9} \rightarrow M \\ x = ۳ \rightarrow y = \frac{1}{۲۸} \rightarrow m \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{۲۸} \times ۱ \leq \int_۲^۳ f(x) dx \leq \frac{1}{9} \times ۱$ (۰/۲۵)	۱/۲۵
	«ادامه در صفحه‌ی چهارم»	

باسمه تعالی

راهنمای تصحیح سؤالات امتحان هماهنگ درس: حساب دیفرانسیل و انتگرال (۲)		رشته : علوم ریاضی
دوره‌ی پیش دانشگاهی (۲۰ نمره ای)		تاریخ امتحان : ۱۳۸۸ / ۴ / ۱۸
دانش آموزان و داوطلبان آزاد سراسر کشور جبرانی دوم سال تحصیلی ۸۸-۱۳۸۷		اداره‌ی کل سنجش و ارزشیابی تحصیلی http://aee.medu.ir
ردیف	راهنمای تصحیح	نمره
۱۵	<p>الف) $\int_0^1 dx + \int_1^2 (x^2 + \sqrt{x} + 1) dx = 0 + \left(\frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + x \right) \Big _1^2 = \frac{1}{3} + \frac{4\sqrt{2}}{3}$ (۰/۲۵)</p> <p>ب) $\ln x = u \Rightarrow \frac{dx}{x} = du \Rightarrow \int \frac{\sqrt{\ln x}}{x} dx = \int \sqrt{u} du = \frac{2}{3}\sqrt{u^3} + c = \frac{2}{3}\sqrt{(\ln x)^3} + c$ (۰/۲۵)</p> <p>ج) $\sin x^2 = u \Rightarrow 2x \cos x^2 dx = du \Rightarrow \int x \cos x^2 \sin^{10} x^2 dx = \frac{1}{2} \int u^{10} du = \frac{1}{22} u^{11} + c$ (۰/۲۵)</p> <p>$= \frac{1}{22} (\sin x^2)^{11} + c$ (۰/۲۵)</p>	۲
	جمع نمره	۲۰

مصححین محترم لطفاً برای راه حل های صحیح دیگر بارم منظور فرمایید.