

سئوالات درس جبر و احتمال  
1) با استقراء ثابت کنید .

(الف)  $1+3+3^2+\dots+3^n = \frac{1}{2}(3^{n+1}-1)$  (ب)  $2^n > n+1$

(ج)  $\frac{1}{1 \times 3} + \frac{1}{3 \times 5} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}$  (د)  $n^5 - n$  بر 5

بخشپذیر است

(و)  $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{n^2} < 2 - \frac{1}{n}$  (ه)

$n! \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$

(ز)  $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 < n^3$

2) هفت نقطه درون یک شش ضلعی منتظم بطول ضلع 1 انتخاب می کنیم . ثابت کنید لا اقل فاصله دو نقطه کمتر از 1 است .

3) ثابت کنید اگر  $x, y > 0$  باشند آنگاه  $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} > 2$  و اگر  $x, y < 0$  آنگاه  $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} < -2$

( با استفاده از اصل بازگشتی )

4) نشان دهید هر زیر مجموعه 6 عضوی از مجموعه  $S = \{1, 2, 3, \dots, 9\}$  حداقل دو عضو دارد که مجموع آنها کمتر از 10 است .

5) از 30 نفر دانش آموز یک کلاس حد اقل چند نفر در یک روز هفته متولد شده اند . چرا ؟

6) اگر  $A = (2, 6)$  و  $B = (-1, 2]$  و  $C = [1, 5]$  و  $D = (0, 3)$  باشند مجموعه های زیر را مشخص و در صفحه محورهای مختصات نشان دهید

(الف)  $C \times B$  (ب)  $A \times D$  (ج)  $A \times B$

(د)  $(A \cap B) - C$  (ه)  $(A \cap B \cap C)'$

7) با استفاده از قوانین مجموعه ها ثابت کنید .

(الف)  $(A - B) \cap C = (A \cap C) - B$  (ب)  $(A \cup C) - B = (A - B) \cup (C - B)$

(ج)  $(A \cup B) \Delta C = (A - C) \cup (B - C) \cup [(C - B) - A]$  (د)  $(A - B) - C = A - (B \cup C)$

8) مجموعه توانی ( زیر مجموعه ها ) مجموعه  $A = \{1, \{1\}, \{\{1\}\}\}$  را بنویسید .

9) اگر  $A = \{2^x | x \in Z, -1 \leq x \leq 1\}$  و  $B = \{x | x \in Z, x^2 \leq 1\}$  باشند  $(A \times B) - (B \times A)$  چند عضو دارد .

(10) رابطه  $R$  روی  $(Z - \{0\})^2$  بصورت  $(x, y)R(m, n) \Leftrightarrow \frac{a^2}{b} = \frac{c^2}{d}$  اولاً نشان دهید  $R$  یک

رابطه هم ارزی است. ثانیاً کلاسهای هم ارزی  $[(2,3)]$  را بنویسید و رسم نمائید.

(11) رابطه  $R$  روی مجموعه  $R^2$  بصورت  $(a, b)R(c, d) \Leftrightarrow a^2d = c^2b$  تعریف شده. آیا  $R$  یک رابطه هم ارزی است.

(12) در صفحه دایره ای بشعاع 3 نقطه ای را بتصادف انتخاب می کنیم و پیشامد آنرا حساب کنید فاصله نقطه تا دایره ( محیط ) کمتر از یک باشد ( با مجموعه و شکل نشان دهید )

(13) دو عدد حقیقی  $x$  و  $y$  طوری انتخاب شده اند که  $1 < x < 2$  ,  $0 < y < 3$  پیشامد آنرا که  $1 < 2x - y < 2$  باشد.

(14) 5 دانش آموز سال دوم و 7 دانش آموز سال سوم برای بازی در تیم والیبال انتخاب شده و 6 نفر از آنها انتخاب می شوند. احتمال آنرا حساب کنید. الف: 2 نفر سال دوم و 4 نفر سال سوم باشند. ب: حداقل 4 نفر سال سوم باشند.

(15) دو عدد حقیقی بطور تصادفی بین صفر و چهار انتخاب می کنیم. مطلوب است پیشامد آنکه نسبت آنها بین  $\frac{1}{2}, \frac{2}{5}$  باشد.