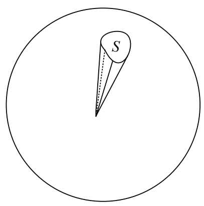
باسمه تعالی

درس: هندسه	سازمان ملی پرورش استعدادهای درخشان	تاریخ آزمون:85/2/30
کلاس :دوم تجربی	مرکز آموزشی دبیرستان فرزانگان	وقت آزمون : 100 دقیقه
نام و نام خانوادگی :	سال تحصیلی 85-84	تعداد سوال : 8

1. فرمول محاسبه مساحت کره را اثبات نمایید: **(2/5 نمره)**



اثبات کتاب

2. اگر طول قطر مکعبی $\sqrt{٦}$ باشد، مساحت کل آن را بدست آورید. **(1/5 نمره)**

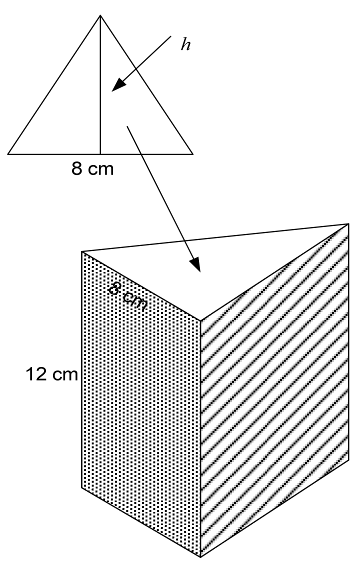
اگر در یک مکعب طول ضلع (یال مکعب) را a فرض کنیم، طول قطر آن $\sqrt{٣}a$ خواهد بود. بنابراین در اینجا داریم:
(S بیان کنندهٔ مساحت کل مکعب است.)

$$\sqrt{٣}a = \sqrt{٦} \Rightarrow a = \sqrt{٢} \Rightarrow S = ٦ \times a^{٢} = ١٢$$

---

3. اگر قاعدهٔ یک منشور قائم، مثلث متساوی الاضلاعی به طول 8 سانتی متر و ارتفاع منشور 12 سانتی متر باشد، مساحت جانبی و مساحت کل این منشور را بدست آورید. **(2 نمره)**

برای محاسبهٔ مساحت جانبی و مساحت کل منشور، باید مساحت وجه ها را به مساحت قاعده ها جمع کرد. قاعدهٔ منشور مثلث متساوی الاضلاع است و وجه های کناری سه مستطیل به طول 12 (برابر با ارتفاع منشور) و عرض 8 (ضلع مثلث متساوی الاضلاع) هستند و باید مساحت قاعده را نیز حساب نماییم.



$$a = ٨ \Rightarrow h = \frac{\sqrt{٣}}{٢}a = ٤\sqrt{٣} \Rightarrow S = \frac{١}{٢}a \times h = \frac{١}{٢} \times ٨ \times ٤\sqrt{٣}$$

$$\Rightarrow S = ١٦\sqrt{٣}$$

مساحت کل = مساحت قاعده ها + مساحت وجه ها

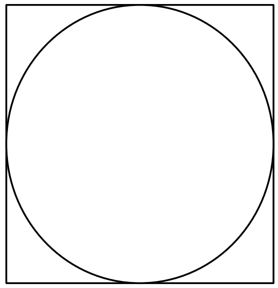
$$٣ \times (٨ \times ١٢) + ٢ \times ١٦\sqrt{٣} = ٢ + ٣٢\sqrt{٣}$$

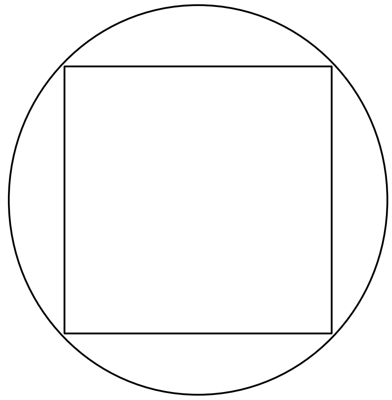
مساحت جانبی = مساحت وجه ها

$$٣ \times (٨ \times ١٢) = ٢٨٨$$

---

4. در یک کره، یک مکعب و در مکعب یک کره محاط کرده ایم. نسبت حجم کره بزرگتر را به کره کوچکتر بدست آورید.**(2 نمره)**





وقتی مکعب را درون یک کره قرار می دهیم، گوشه های مکعب به دیواره کره برخورد می کند. بنابراین قطر مکعب = قطر کره خواهد شد. اگر شعاع کره بزرگ را R درنظر بگیریم و ضلع مکعب a خواهیم داشت: $\sqrt{۳}a = ۲R$

اگر کره را درون مکعب قرار دهیم، کره به دیواره های مکعب مماس می شود. بنابراین قطر کره با ضلع مکعب برابر می شود. اگر شعا دایره کوچکتر را r در نظر بگیریم داریم: $a = ۲r$

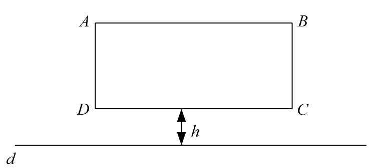
حال اگر نسبت حجم دو کره را بدست آرویم، خواهیم داشت:

$$\frac{\frac{٤}{۳}\pi R^{۳}}{\frac{٤}{۳}\pi r^{۳}} = \left(\frac{R}{r}\right)^{۳} = \left(\frac{\frac{\sqrt{۳}}{۲}a}{\frac{۱}{۲}a}\right)^{۳} = ۳\sqrt{۳}$$

---

5. حجم حاصل از دوران اشکال زیر را حول محور d محاسبه نمایید:

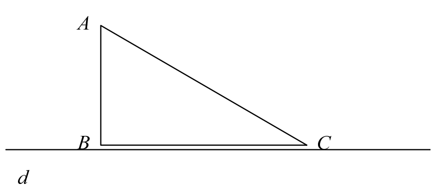
الف) $AB=10$ و $BC=4$ و $h=1$ ($\pi = ۳$) (2 نمره)



برای بدست آوردن حجم حاصل از دوران باید حجم دو استوانه را از یکدیگر کم کنیم:

$$\left((٤+۱)^{۲}\pi\times۱۰ - ۱^{۲}\times\pi\times۱۰\right) = ۱٦۰\times۳ = ٤۸۰$$

ب) $AB=4$ و $BC=3$ و ($\pi = ۳$) (3 نمره)

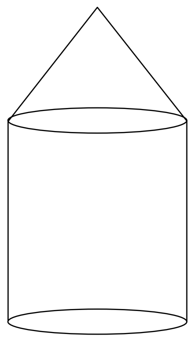


حجم حاصل از دوران یک مخروط است:

$$\frac{۱}{۳}\times\left(\pi\times٤^{۲}\right)\times۳ = ٤۸$$

---

6. زمین داری محصول خود را پس از برداشت در سیلویی به شکل روبرو که متشکل از یک استوانه قائم و یک کلاهک مخروطی شکل است، ذخیره می کند. اگر ارتفاع کل سیلو 12 متر و ارتفاع کلاهک مخروطی $\frac{۱}{٤}$ ارتفاع کل و شعاع قاعده سیلو 3/5 متر باشد و نیز بدانیم که پس از ذخیره شدن محصول، سیلو تا ارتفاع 4 متری از سطح زمین پر می شود، در این صورت حجم قسمت خالی سیلو را بدست آورید. **(3 نمره)** $\left(\pi = \frac{۲۲}{۷}\right)$



$$h' = \frac{۱}{٤}h \Rightarrow h + h' = ۱۲ \Rightarrow \begin{cases} h = \frac{٤۸}{٥} \\ h' = \frac{۱۲}{٥} \end{cases}$$

$$V = \left(h \times S\right) + \left(\frac{۱}{۳}h' \times S\right) = \left(\frac{٤۸}{٥} \times (۳/٥)^۲ \pi\right) + \left(\frac{۱}{۳} \times \frac{۱۲}{٥} \times (۳/٥)^۲ \pi\right)$$

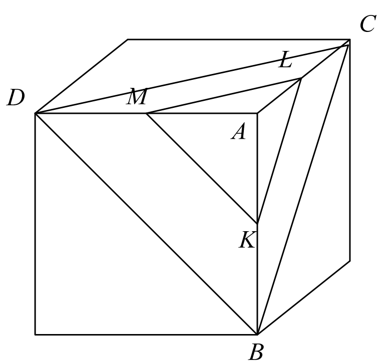
$$= \left(\frac{٤۸}{٥} \times (۳/٥)^۲ \times \frac{۲۲}{۷}\right) + \left(\frac{۱}{۳} \times \frac{۱۲}{٥} \times (۳/٥)^۲ \times \frac{۲۲}{۷}\right) = ۳٦۹/٦ + ۳۰/۸ = ٤۰۰/٤$$

حجم پر شده را از حجم کل کم می کنیم:

$$٤۰۰/٤ - \left(٤ \times (۳/٥)^۲ \times \frac{۲۲}{۷}\right) = ۲٤٦/٤$$

---

7. در مکعب شکل روبرو K، L و M وسطهای سه یال هستند. حجم هرم $AKLM$ چه کسری از حجم مکعب است؟ **(2 نمره)**



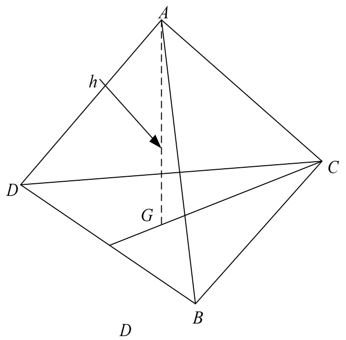
اگر رأس های B، C و D را به هم وصل نماییم، هرمی مشابه هرم حاضر بدشت می آید که اضلاعش، 2 برابر اضلاع هرم $AKML$ است. بنابراین حجم آن 8 برابر هرم $AKML$ خواهد بود.

برای محاسبه حجم هرم بزرگتر، ارتفاع هرم را برحسب ضلع مکعب بدست می آوریم.

قاعده هرم یک مثلث متساوی الاضلاع است که هر ضلعش $\sqrt{۲}a$ (فرض کردیم ضلع مکعب a است.)

اگر ارتفاع این هرم را رسم کنیم، طبق شکل در مرکز ثقل مثلث BCD، قاعده را قطع می کند و بر قاعده عمود است. فاصله مرکز ثقل تا هر رأس مثلث متساوی الاضلاع برابر با $\frac{۲}{۳}$ طول میانه (که در مثلث متساوی الاضلاع همان ارتفاع است) می باشد.

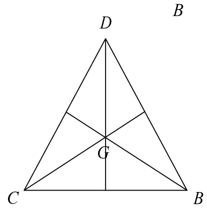
بنابراین در مثلث CGA اگر از قضیهٔ فیثاغورس استفاده نماییم خواهیم داشت:



$$AC^2 = AG^2 + GC^2 \Rightarrow a^2 = h^2 + \left(\frac{2}{3}\times\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{2}a\right)\right)^2 \Rightarrow h^2 = \frac{1}{3}a^2$$

$$\Rightarrow h = \frac{1}{\sqrt{3}}a$$

$$\Rightarrow V = \frac{1}{3}\times h\times S = \frac{1}{3}\times\frac{a}{\sqrt{3}}\times\left(\frac{\sqrt{2}a\times\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{2}a}{2}\right) = \frac{a^3}{6}$$



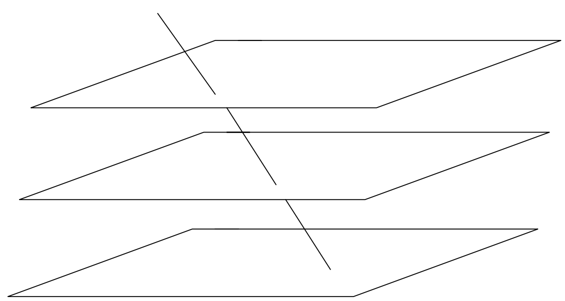
بنا بر این محاسبات، حجم هرم $ABCD$ برابر با $\frac{1}{6}$ حجم مکعب است. پس هرم کوچکتر $\frac{1}{48}$ حجم هرم را دارد.

---

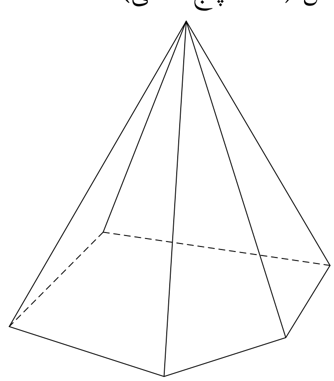
8. **ترسیم: (در برگه سؤالات شکلها را رسم کنید.)**

عبارتهای داده شده را فقط با رسم شکل نشان دهید. **(2 نمره)**

- اگر خطی در فضا یکی از صفحات موازی را قطع کند دیگری را نیز قطع می کند.



- هرم ناقص (قاعده پنج ضلعی)



- قضیه تالس در فضا