$$\Pi$$

با تشکر از:

اساتید گروه ریاضی دانشگاه فردوسی مشهد آقایان دکتر عرفانیان ،

دکتر میرزا وزیری و دکتر نارنجانی

استاد محترم جناب محمد اله دادی (استاد راهنما)

آقای محمد مجتبی جوارشکیان (تایپ و صفحه آرایی)

و با تشکر صمیمانه از آقای محمود حسینی مدیریت محترم دبیرستان و

پیش دانشگاهی رسا

راه های سریع برای محاسبه مجذور اعداد بزرگ

1– تکرار

الف) هر عددی که یکان آن $\underline{1}$ یا $\underline{9}$ باشد یکان مجذور آن عدد $\underline{1}$ است .

ب) هر عددی که یکان آن $\underline{3}$ یا $\underline{7}$ باشد یکان مجذور آن عدد $\underline{9}$ است .

پ) هر عددی که یکان آن $\underline{2}$ یا $\underline{8}$ باشد یکان مجذور آن عدد $\underline{4}$ است .

ت) هر عددی که یکان آن $\underline{5}$ باشد دو رقم سمت راست (یکان و دهگان) مجذور آن عدد $\underline{25}$ است .

ث) ارقام یکان و دهگان 100 تا 100 تا تکرار می شود . مثلاً رقم یکان و دهگان مجذور این اعداد یکی است . $5 \ldots 7841 - 1041 - 41$

یکان و دهگان مجذور هر عددی مانند n که عضو اعداد حسابی و $0 \le n \le 100$ برابر یکان و دهگان مجذور اعداد $n+100$ ، $n+200$ و ... و به طور کلی $(k \in w)\, n+100k$ است .

اگر $n > 100$ باشد ارقام یکان و دهگان مجذور عدد n برابر است با ارقام یکان و دهگان مجذور اعداد $n-100$ و ... به طوری کلی $n-100k$ ($k \in w$ و به شرطی که $n-100k \ge 0$ باشد) است .

2– تقارن

الف) رقم یکان در مربع اعداد در بازه $n-10$ تا n که رقم یکان n صفر یا یک باشد تقارن دارد .

1 4 9 6 5 6 9 4 1

ب) رقم دهگان مربع در جدول از *1* تا *50* و *50* تا *100* تقارن معکوس دارد . در جدول با رنگ سبز و مشکی این اعداد مشخص شده اند .

1- رقم دهگان مربع های *91* تا *100* برابر رقم دهگان مربع های *10* تا *1* است . مثلاً رقم دهگان مربع *91* و *9* برابر <u>*8*</u> است.

2- رقم دهگان مربع های *81* تا *90* برابر رقم دهگان مربع های *20* تا *11* است . مثلاً رقم دهگان مربع *89* و *11* برابر <u>*2*</u> است.

3- رقم دهگان مربع های *71* تا *80* برابر رقم دهگان مربع های *30* تا *21* است . مثلاً رقم دهگان مربع *71* و *29* برابر <u>*4*</u> است.

4- رقم دهگان مربع های *61* تا *70* برابر رقم دهگان مربع های *40* تا *31* است . مثلاً رقم دهگان مربع *69* و *31* برابر <u>*6*</u> است .

5- رقم دهگان مربع های *51* تا *60* برابر رقم دهگان مربع های *50* تا *41* است . مثلاً رقم دهگان مربع *58* و *42* برابر <u>*6*</u> است .

پ) جمع ارقام دهگان مربع های نیز تقارن دارد یعنی :

44 44 44 24 24 44 44 44 24

1- جمع ارقام دهگان مربع های *91* تا *100* یا *1* تا *10* برابر <u>*24*</u> است .

2- جمع ارقام دهگان مربع های *81* تا *90* یا *11* تا *20* برابر <u>*44*</u> است .

3- جمع ارقام دهگان مربع های *71* تا *80* یا *21* تا *30* برابر <u>*44*</u> است .

4- جمع ارقام دهگان مربع های *61* تا *70* یا *31* تا *40* برابر <u>*44*</u> است .

5- جمع ارقام دهگان مربع های *51* تا *60* یا *41* تا *50* برابر <u>*24*</u> است .

6- جمع ارقام دهگان مربع های هر کدام *1* تا *10* و *41* تا *50* و *51* تا *60* و *91* تا *100* برابر <u>*24*</u> است.

7- جمع ارقام دهگان مربع های هر کدام 11 تا 20 و 21 تا 30 و 31 تا 40 و 61 تـا 70 و 71 تا 80 و 81 تا 90 برابر 44 است .

3- همنهشتی

1- هر عدد n رقمی که رقم یکانش $\underline{1}$ یا $\underline{9}$ باشد مربع n همنهشت است با $\underline{1}$ به پیمانه $\underline{10}$.

2- هر عدد n رقمی که رقم یکانش $\underline{2}$ یا $\underline{8}$ باشد مربع n همنهشت است با $\underline{4}$ به پیمانه $\underline{10}$.

3- هر عدد n رقمی که رقم یکانش $\underline{4}$ یا $\underline{6}$ باشد مربع n همنهشت است با $\underline{6}$ به پیمانه $\underline{10}$.

4- هر عدد n رقمی که رقم یکانش $\underline{5}$ باشد مربع n همنهشت است با $\underline{5}$ به پیمانه $\underline{10}$.

4- پیدا کردن دو رقم سمت راست (یکان و دهگان) مجذور یک عدد رقمی .

الف) با دانستن ارقام دهگان 1 تا 50 ، توانایی گفتن رقم یکان و دهگان مجذور یک عدد n رقمی را داریم (بااستفاده از دوره گردش)

ب) با داشتن جدول ، فقط کافی است که دو عدد سمت راست عدد n رقمی را در جدول پیدا کرده و رقم یکان و دهگان مربع آن دو عدد سمت راست برابر یکان و دهگان مربع عدد n رقمی است . مثلاً برای پیدا کردن رقم یکان و دهگان 5005987651 فقط کافی است رقم یکان و دهگان مربع 51 را از داخل جدول پیدا کنیم .

5- مجموع

الف) مجموع ارقام یکان 45 است برای $n-10$ تا n به شرطی که $n \geq 10 , n \in N$ باشد .

ب) مجموع ارقام دهگان $\underline{360}$ است برای $n-100$ تا n به شرطی که $n \geq 100 , n \in N$ باشد .

پ) مجموع ارقام یکان و دهگان $\underline{810}$ است برای $n-100$ تا n به شرطی که $n \geq 100 , n \in N$ باشد .

6– تشابه

1- صدگان مربع هر عددی مانند n که دو رقم سمت راست n بین 40 تا 50 باشد برابر با رقم صدگان مربع عدد $n + 10$ است . عکس این مطلب نیز درست است یعنی اگر رقم یکان و دهگان (دو رقم سمت راست) مربع عدد $n+10$ بین 50 تا 60 باشد رقم صدگان مربع $n + 10$ برابر با رقم صدگان مربع n است .

مثلاً رقم صدگان $(2785)^2$ (153 ... 153) برابر رقم صدگان $(2784)^2$ (153 ... 153) است .

2- سه رقم راست مربع عددی که یکان آن 5 باشد برابر است با سه رقم راست مربع یکان و دهگان آن عدد .

مثلاً سه رقم راست عدد $(43\underline{35})^2$ (5835 ... 5835) برابر با سه رقم راست $(35)^2$ است که می شود 225 .

3- رقم صدگان در مربع اعداد نیز 1000 تا 1000 تکرار می شود . مثلاً رقم صدگان مربع عدد 181 با رقم صدگان مربع اعداد 1181 و 2181 و 100181 و 56000181 برابر است .

4- رقم صدگان برای مربع اعداد 40 تا 50 با 50 تا 60 برابر است .

مثلاً رقم صدگان 44 و 54 برابر 9 است .

مثلاً رقم صدگان 41 و 51 برابر 6 است .

7– کاربرد

الف) پیدا کردن همنهشت یک عدد n رقمی به پیمانه 10 .

y رقم یکان ، x , y معلوم $\qquad (x \; \dots \; y)^2 \overset{10}{\equiv} \square$

ب) پیدا کردن رقم یکان و دهگان مربع یک عدد n رقمی .

y رقم یکان ، z رقم دهگان و z , x , y اعداد معلوم $\qquad (x \; \dots \; zy)^2 = \; \dots \; \square$

مثلاً برای پیدا کردن رقم یکان و دهگان مربع عدد $8954327 \; \dots \; 5$ کافی است رقم یکان و دهگان مربع عدد 27 را پیدا کرده که برابر 29 است پس

$$(5 \; \dots \; 8954327)^2 = \; \dots \; 29$$

پ) پیدا کردن رقم صدگان مربع یک عدد n رقمی .

$$(x \; \dots \; y\,z\,f\,)^2 = \; \dots \; \square \; \square \; \square$$

برای پیدا کردن رقم صدگان مربع یک عدد n رقمی کافی است سه رقم اول (یکان و دهگان و صدگان) آنرا برداشته و بتوان 2 برسانیم که رقم یکان و دهگان و صدگان این عدد برابر سه رقم اول از سمت راست مربع یک عدد n رقمی است . ما این نتیجه را از تکرار رقم صدگان به صورت 1000 تا 1000 تا به دست می آوریم .

مثلاً برای پیدا کردن رقم صدگان مربع عدد $893512532131 \; \dots \; 7$ کافی است . رقم یکان و دهگان و صدگان مربع 131 را به دست آورده که برابر 161 است پس

$$(7 \; \dots \; 893512532131\,)^2 = \; \dots \; 161$$

8– قضیه

مربع هر عددی مانند n برابر است با مربع عدد $n-1$ بعلاوه $2n-1$ است .

اگر $a_n = n^2$, $a_{n-1} = (n-1)^2$ باشد ثابت می کنیم : $a_n = a_{n-1} + 2n - 1$

اثبات به روش استقرای ریاضی :

$a_1 = a_{1-1} + 2(1) - 1 \Rightarrow 1 = 0 + 1$ ✓

فرض استقراء $a_n = a_{n-1} + 2n - 1$

حکم استقراء $a_{n+1} = a_n + 2(n+1) - 1 = a_n + 2n + 1$

اثبات : در حکم استقراء به جای a_n مقدار آن را قرار می دهیم پس داریم :

$$a_{n+1} = a_{n-1} + 2n - 1 + 2n + 1 = a_{n-1} + 4n$$

که $a_{n-1} = (n-1)^2$, $a_{n+1} = (n+1)^2$ است پس داریم :

$$a_{n+1} = (n-1)^2 + 4n = n^2 - 2n + 4n + 1 = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$$

$$(n+1)^2 = (n+1)^2 \quad ✓$$

لذا حکم ثابت شد .

تعمیم یافته قضیه

اگر ما روش بالا را ادامه دهیم خواهیم داشت :

$$a_n = a_{n-1} + 2n - 1$$
$$a_{n-1} = a_{n-2} + 2(n-1) - 1 = a_{n-2} + 2n - 3$$
$$a_{n-2} = a_{n-3} + 2(n-2) - 1 = a_{n-3} + 2n - 5$$
$$\vdots$$
$$a_n = 2n - 1 + 2n - 3 + 2n - 5 + \ldots$$
$$a_n = 2n + 2n + 2n + \ldots \quad -(\underbrace{1 + 3 + 5 + \ldots}_{\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2}) = n(2n) - n^2 = n^2$$

یعنی ما می توانیم تا جایی این روش را ادامه دهیم تا a_{n-k} عددی راحت به دست آید . $a_{n-k} = (n-k)^2$

کاربرد

ما با استفاده از قضیه بالا می توانیم مربع بعضی از اعداد n رقمی را که زود راحت به دست می آیند حساب کنیم منظور از راحت به دست آمدن این است که وقتی صفرها را بر می داریم عدد باقیمانده را به توانیم به توان برسانیم .

مثال :

$$(۵۱۳)^{۲} = ?$$

$$a_n = ۵۱۳$$

$$a_n = (a_{n-۳})^{۲} + ۲a_n - ۱ + ۲a_n - ۳ + ۲a_n - ۵$$

$$= ۵۱۰^{۲} + ۲(۵۱۳) - ۱ + ۲(۵۱۳) - ۳ + ۲(۵۱۳) - ۵ = ۲۶۰۱۰۰ + ۱۰۲۵ - ۱۰۲۳ + ۱۰۲۱$$

$$= ۲۶۰۱۰۰ + ۳۰۶۹ = ۲۶۳۱۶۹$$

قضیه طلایی

با استفاده از تعمیم یافته قضیه داریم : $a_n = a_{n-k} - k^{۲} + k(۲n)$

با استفاده از این قضیه می توانیم هر عدد n رقمی را که کامپیوتر قادر به محاسبه آن نیست ، پیدا کنیم . کامپیوتر از عدد 25 رقمی به آن طرف نمی تواند کل اعداد را بنویسد .

مثال :

$$263169 = ?$$

$$263169 = (263000)^2 - (169)^2 + 169(2\times 263169) = 69169\times 10^6 - 28561 + 889511$$

$$= 69169\times 10^6 + 88922561 = 69257922156$$

دنباله

در مربع اعداد ، تفاضل های هر دو عدد متوالی سبب تشکیل دنباله اعداد فرد را می دهد که این گفته از آن قسمت قضیه به دست می آید که ما داشتیم :

$n \in N \quad \Rightarrow a_n = a_{n-1} + 2n - 1 \Rightarrow a_n - a_{n-1}$ = عدد فرد

$$a_n = n^2$$

$$a_{n-1} = (n-1)^2$$

یعنی : $a_{n-2} \underbrace{\quad}_{2n-3} a_{n-1} \underbrace{\quad}_{2n-1} a_n \underbrace{\quad}_{2n+1} a_{n+1} \underbrace{\quad}_{2n+3} a_{n+2}$

و به عبارت دیگر :

$$\underbrace{0^2 \quad 1^2}_{1} \underbrace{\quad 2^2}_{3} \underbrace{\quad 3^2}_{5} \underbrace{\quad 4^2}_{7} \underbrace{\quad 5^2}_{9} \underbrace{\quad 6^2}_{11} \underbrace{\quad 7^2}_{13} \underbrace{\quad 8^2}_{15} \quad \ldots \quad \underbrace{(n-1)^2 \quad n^2}_{2n-1}$$

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2$$

در عبارت بالا مشاهده می شود که تفاضل های هر دو عدد مربع متوالی تشکیل دنباله اعداد فرد را می دهد .

کاربرد

اگر ما بخواهیم عددی مانند n را که به عدد روند نزدیک است به توان برسانیم می توانیم از روش بالا به صورت زیر استفاده کنیم که a_{n-k} عدد روند است .

$$n^{۲} = (n-k)^{۲} + \sum_{k'=۱}^{k'=k}(۲(n-k)+k')$$

k' فرد است

$$\sum_{k'=۱}^{k'=k}(۲(n-k)+k') = k(۲(n-k)) + k^{۲}$$

مثال 1 :

$$(1000005)^2 = ?$$

$$(1000005)^2 = (1000005-5)^2 + \sum_{k=1}^{n'=5} 2(1000005-5) + k'$$

$$(1000005)^2 = 10^{12} + 5(2000000) + 25 = 10^{12} + 10000025 = 1/000010000025$$

مثال 2 :

$$(250013)^2 = ?$$

$$(250013)^2 = (250013-13)^2 + 13(500000) + 169$$

$$(250013)^2 = 625 \times 10^{10} + 6500169 = 6/250065000169$$

رمز اصلی جدول

اگر در هر ردیف جدول طلایی مجذور اعداد با دقت توجه کنید می توانید دنباله ای را در بین مربع اعداد مشاهده کنید . حال توضیحات بیشتری درباره این موضوع بیان می کنیم . اگر ما در یک ردیف که عددها به صورت n ، $n + 10$ ، $n + 20$ و به طوری کلی $n+10k \ (k \in W)$ است ، مربع آنها را به دست آوریم می بینیم که عدد یکان بین آنها مشترک است و یا به بیان دیگر عدد یکان بین آنها یکی است حال اگر این عدد یکان را از بین تمامی اعداد حذف کنیم بین بقیه اعداد باقیمانده آنها دنباله ای بوجود می آید به صورت زیر :

$$\underbrace{n^2 \quad (n+10)^2}_{t} \underbrace{\quad (n+20)^2}_{t+20} \underbrace{\quad (n+30)^2}_{t+2(20)} \underbrace{\quad (n+40)^2}_{t+3(20)},...$$

$$t_m = t_{m-1} + (m-2) \times 20 + t$$

که با استفاده از دنباله بالا قانونی به صورت زیر به دست می آید :

$$t_m = (\sum_{i=1}^{m-2} i) \times 20 + (m-1)t \qquad , m = \left[\frac{a}{10}\right] + 1$$

که در قانون بالا لازم است بدانیم که t اختلاف مربع اعداد n و $n + 10$ است . مقدار t وابسته به عدد یکان عددی مثل a است و مقدار t بین 12 و 30 است $(12 \le t \le 30)$ و در ضمن مقدار t عدد زوجی است که می توان ده مقدار برای t در نظر گرفت . a عددی است که می خواهیم مربع آن را به دست آوریم و t_m مقدار جمله m ام است که با قرار دادن عدد یکان حذف شده در سمت راست عدد t_m حاصل مربع عدد a به دست می آید . حال با توجه به مقدار t یا مقادیر t ده حالت در نظر گرفت به صورتهای زیر :

1. اگر عدد a که می خواهیم مربع آن را بدست آوریم عدد یکانش 1 باشد از رابطه زیر استفاده می کنیم که $t = 12$ است و حاصل a^2 برابر است با قرار دادن عدد 1 در سمت راست عدد t_m .

$1 = 01$ $11 = 121$ $21 = 441$ $31 = 961$ $41 = 1681$ $51 = 2601$ و ...

حال اگر عدد یکان را از همه اعداد حذف کنیم اعداد بالا به صورت زیر تبدیل می شود :

$$\underbrace{0 \quad 12}_{12} \underbrace{\quad 44}_{12+20} \underbrace{\quad 96}_{12+2(20)} \underbrace{\quad 168}_{12+3(20)} \underbrace{\quad 260}_{12+4(20)}...$$

$$t_m = (\sum_{i=1}^{m-2} i) \times 20 + (m-1)12$$

2. اگر عدد a که می خواهیم مربع آن را به دست آوریم عدد یکانش 2 باشد از رابطه زیر استفاده می کنیم که $t = 14$ است و حاصل a^2 برابر است با قرار دادن عدد 4 در سمت راست عدد t_m .

$2 = 04$ $12 = 144$ $22 = 484$ $32 = 1024$ $42 = 1764$ و ...

حال اگر عدد یکان را از همه اعداد حذف کنیم اعداد بالا به صورت زیر تبدیل می شود :

$$\underbrace{0 \quad 14}_{14} \underbrace{\quad 48}_{14+20} \underbrace{\quad 102}_{14+2(20)} \underbrace{\quad 176}_{14+3(20)} \quad ,...$$

$$t_m = (\sum_{i=1}^{m-2} i) \times 20 + (m-1)14$$

نکته :

می دانیم که $\sum_{i=1}^{m-2} i = \frac{(m-2)(m-1)}{2}$.

مثال برای حالت اول

$$(1101)^2 = ? \qquad m = \left[\frac{1101}{10}\right] + 1 = 110 + 1 = 111$$

$$t_{111} = (\sum_{i=1}^{109} i)\times 20 + (111-1)12 = \frac{109\times 110}{2}\times 20 + 110(12) = 119900 + 1320 = 121220\,1$$

مثال برای حالت دوم

$$(882)^2 = ? \qquad m = \left[\frac{882}{10}\right] + 1 = 88 + 1 = 89$$

$$t_{89} = (\sum_{i=1}^{87} i)\times 20 + (89-1)14 = \frac{87\times 88}{2}\times 20 + 88(14) = 76560 + 1232 = 77792\,4$$

3. اگر عدد a که می خواهیم مربع آن را به دست آوریم عدد یکانش $\underline{3}$ باشد از رابطه زیر استفاده می کنیم که $t=16$ است و حاصل a^2 برابر است با قرار دادن عدد $\underline{9}$ در سمت راست عدد t_m .

$3 = 0\mathbf{9}$ $\quad 13 = 16\mathbf{9}$ $\quad 23 = 52\mathbf{9}$ $\quad 33 = 108\mathbf{9}$ $\quad 43 = 184\mathbf{9}$ و ...

حال اگر عدد یکان را از همه اعداد بالا حذف کنیم اعداد بالا به صورت زیر تبدیل می شود :

$$0 \quad 16 \quad 52 \quad 108 \quad 184 \ldots$$
$$16 \quad 16+20 \quad 16+2(20) \quad 16+3(20)$$

$$t_m = (\sum_{i=1}^{m-2} i)\times 20 + (m-1)16$$

مثال :

$$(1223)^2 = ? \qquad m = \left[\frac{1223}{10}\right] + 1 = 122 + 1 = 123$$

$$t_{123} = (\sum_{i=1}^{121} i)\times 20 + (123-1)16 = \frac{121\times 122}{2}\times 20 + 122(16) = 147620 + 1952 = 149572\,9$$

4. اگر عدد a که می خواهیم مربع آن را به دست آوریم عدد یکانش $\underline{4}$ باشد از رابطه زیر استفاده می کنیم که $t = 18$ است و حاصل a^2 برابر است با قرار دادن عدد $\underline{6}$ در سمت راست عدد t_m .

$4 = 1\mathbf{6}$ $\quad 14 = 19\mathbf{6}$ $\quad 24 = 57\mathbf{6}$ $\quad 34 = 115\mathbf{6}$ $\quad 44 = 196\mathbf{3}$ و ...

حال اگر عدد یکان را از همه اعداد بالا حذف کنیم اعداد بالا به صورت زیر تبدیل می شود :

$$\underbrace{1 \quad 19}_{18}\underbrace{\quad 57}_{18+20}\underbrace{\qquad 115}_{18+2(20)}\underbrace{\qquad 193}_{18+3(20)} \quad ,\ldots$$

$$t_m = \left(\sum_{i=1}^{m-2} i\right)\times 20 + (m-1)18 + 1$$

مثال :

$$(4224)^2 = ? \qquad\qquad m = \left[\frac{4224}{10}\right] + 1 = 422 + 1 = 423$$

$$t_{423} = \left(\sum_{i=1}^{421} i\right)\times 20 + (423-1)18 + 1 = \frac{421\times 422}{2}\times 20 + 422(18) + 1 = 1776620 + 7596 + 1 = 1784217\mathbf{6}$$

5. اگر عدد a که می خواهیم مربع آن را به دست آوریم عدد یکانش $\underline{5}$ باشد از رابطه زیر استفاده می کنیم که $t = 20$ است و حاصل a^2 برابر است با قرار دادن عدد $\underline{5}$ در سمت راست عدد t_m .

$5 = 2\mathbf{5}$ $\qquad$ $15 = 22\mathbf{5}$ $\qquad$ $25 = 62\mathbf{5}$ $\qquad$ $35 = 122\mathbf{5}$ $\qquad$ $45 = 202\mathbf{5}$ $\qquad$ و $\ldots$

حال اگر عدد یکان را از همه اعداد حذف کنیم اعداد بالا به صورت زیر تبدیل می شود :

$$\underbrace{2 \quad 22}_{20}\underbrace{\quad 62}_{20+20}\underbrace{\qquad 122}_{20+2(20)}\underbrace{\qquad 202}_{20+3(20)} \quad ,\ldots$$

$$t_m = \left(\sum_{i=1}^{m-2} i\right)\times 20 + (m-1)20 + 2$$

مثال :

$$(5325)^2 = ? \qquad\qquad m = \left[\frac{5325}{10}\right] + 1 = 532 + 1 = 533$$

$$t_{533} = \left(\sum_{i=1}^{531} i\right)\times 20 + (533-1)20 + 2 = \frac{531\times 532}{2}\times 20 + 532(20) + 2 = 2824920 + 10640 + 2 = 2835562\mathbf{5}$$

6. اگر عدد a که می خواهیم مربع آن را به دست آوریم عدد یکانش $\underline{6}$ باشد از رابطه زیر استفاده می کنیم که $t = 22$ است و حاصل a^2 برابر است با قرار دادن عدد $\underline{6}$ در سمت راست عدد t_m .

$6 = 3\mathbf{6}$ $\qquad$ $16 = 25\mathbf{6}$ $\qquad$ $26 = 67\mathbf{6}$ $\qquad$ $36 = 129\mathbf{6}$ $\qquad$ $46 = 211\mathbf{6}$ $\qquad$ و $\ldots$

حال اگر عدد یکان را از همه اعداد حذف کنیم اعداد بالا به صورت زیر تبدیل می شود :

$$\underbrace{3 \quad 25}_{22}\underbrace{\quad 67}_{22+20}\underbrace{\qquad 129}_{22+2(20)}\underbrace{\qquad 211}_{22+3(20)} \quad ,\ldots$$

$$t_m = \left(\sum_{i=1}^{m-2} i\right)\times 20 + (m-1)22 + 3$$

مثال :

$(17626)^2 = ?$ $\qquad m=\left[\dfrac{17626}{10}\right]+1=1762+1=1763$

$$t_{1763}=\left(\sum_{i=1}^{1761} i\right)\times 20+(1763-1)22+3=\frac{1761\times 1762}{2}\times 20+(1762)22+3=31028820+38764+3=31067587\ \mathbf{6}$$

7. اگر عدد a که می خواهیم مربع آن را به دست آوریم عدد یکانش $\underline{7}$ باشد از رابطه زیر استفاده می کنیم که $t = 24$ است و حاصل a^2 برابر است با قرار دادن عدد $\underline{9}$ در سمت راست عدد t_m .

$7 = 4\mathbf{9}$ $\qquad 17 = 28\mathbf{9}$ $\qquad 27 = 72\mathbf{9}$ $\qquad 37 = 136\mathbf{9}$ $\qquad 47 = 220\mathbf{9}$ و $\ldots$

حال اگر عدد یکان را از همه اعداد حذف کنیم اعداد بالا به صورت زیر تبدیل می شود :

$$\underbrace{4 \quad 28}_{24}\!\!\underbrace{\quad}_{24+20}\!\!\underbrace{72 \quad 136}_{24+2(20)}\!\!\underbrace{\quad 220}_{24+3(20)} \quad ,\ldots$$

$$t_m=\left(\sum_{i=1}^{m-2} i\right)\times 20+(m-1)24+4$$

مثال :

$(1227)^2 = ?$ $\qquad m=\left[\dfrac{1227}{10}\right]+1=122+1=123$

$$t_{123}=\left(\sum_{i=1}^{121} i\right)\times 20+(123-1)24+4=\frac{121\times 122}{2}\times 20+122(24)+4=147620+2928+4=150552\ \mathbf{9}$$

8. اگر عدد a که می خواهیم مربع آن را به دست آوریم عدد یکانش $\underline{8}$ باشد از رابطه زیر استفاده می کنیم که $t = 26$ است و حاصل a^2 برابر است با قرار دادن عدد $\underline{4}$ در سمت راست عدد t_m .

$8 = 6\mathbf{4}$ $\qquad 18 = 32\mathbf{4}$ $\qquad 28 = 78\mathbf{4}$ $\qquad 38 = 144\mathbf{4}$ و $\ldots$

حال اگر عدد یکان را از همه اعداد حذف کنیم اعداد بالا به صورت زیر تبدیل می شود :

$$\underbrace{6 \quad 32}_{26}\!\!\underbrace{\quad}_{26+20}\!\!\underbrace{78 \quad 144}_{26+2(20)} \quad ,\ldots$$

$$t_m=\left(\sum_{i=1}^{m-2} i\right)\times 20+(m-1)26+6$$

مثال :

$(4118)^2 = ?$ $\qquad m=\left[\dfrac{4118}{10}\right]+1=411+1=412$

$$t_{412}=\left(\sum_{i=1}^{410} i\right)\times 20+(412-1)26+6=\frac{410\times 411}{2}\times 20+411(26)+6=1685100+10686+6=1695792\ \mathbf{4}$$

9. اگر عدد a که می خواهیم مربع آن را به دست آوریم عدد یکانش $\underline{9}$ باشد از رابطه زیر استفاده می کنیم که $t = 28$ است و حاصل a^2 برابر است با قرار دادن عدد $\underline{1}$ در سمت راست عدد t_m .

$9 = 81$ $\quad 19 = 361$ $\quad 29 = 841$ $\quad 39 = 1521$ $\quad 49 = 2401$ و ...

حال اگر عدد یکان را از همه اعداد حذف کنیم اعداد بالا به صورت زیر تبدیل می شود :

$$\underbrace{8 \quad 36}_{28}\ \underbrace{\quad 84}_{28+20}\ \underbrace{\quad 152}_{28+2(20)}\ \underbrace{\quad 240}_{28+3(20)}\ ,...$$

$$t_m = (\sum_{i=1}^{m-2} i)\times 20 + (m-1)28 + 8$$

مثال

$$(1009)^2 = ? \qquad m = \left[\frac{1009}{10}\right] + 1 = 100 + 1 = 101$$

$$t_{101} = (\sum_{i=1}^{99} i)\times 20 + (101-1)28 + 8 = \frac{99\times 100}{2}\times 20 + 100(28) + 8 = 99000 + 2800 + 8 = 101808$$

10. اگر عدد a که می خواهیم مربع آن را به دست آوریم عدد یکانش صفر باشد از رابطه زیر استفاده می کنیم که $t = 30$ است و حاصل a^2 برابر است با قرار دادن عدد صفر در سمت راست عدد t_m .

$10 = 100$ $\quad 20 = 400$ $\quad 30 = 900$ $\quad 40 = 1600$ $\quad 50 = 2500$ و ...

حال اگر عدد یکان را از همه اعداد حذف کنیم اعداد بالا به صورت زیر تبدیل می شود :

$$\underbrace{10 \quad 40}_{30}\ \underbrace{\quad 90}_{30+20}\ \underbrace{\quad 160}_{30+2(20)}\ \underbrace{\quad 250}_{30+3(20)}\ ,...$$

$$t_m = (\sum_{i=1}^{m-2} i)\times 20 + (m-1)30 + 10 \quad , \qquad m = \left[\frac{a}{10}\right]$$

مثال :

$$(5230)^2 = ? \qquad m = \left[\frac{5230}{10}\right] = 523$$

$$t_{523} = (\sum_{i=1}^{521} i)\times 20 + (523-1)30 + 10 = \frac{521\times 523}{2}\times 20 + 522(30) + 10 = 2719620 + 15660 + 10 = 2735290$$

توضیح

1- قانون اصلی رمز اصلی جدول به صورت زیر است :

$$t_m = (\sum_{i=۱}^{m-۲} i)\times ۲۰ + (m-۱)t + u$$

که u می تواند صفر ، یک ، دو ، سه ، چهار ، شش ، هشت یا ده باشد که به صورت زیر می توان مطلب گفته شده را بیان کرد :

$$u \in \{0,1,2,3,4,6,8,10\}$$

2- مقدار m برای عددی که یکانش صفر است به صورت زیر است چون این عدد (a) در تقسیم بر 10 ، خارج قسمت آن عددی صحیح و باقیمانده نیز صفر است پس جزء صحیح عدد $\frac{a}{10}$ که عددی صحیح می شود ، خودش می شود .

(یعنی $\left[\frac{a}{10}\right]=\frac{a}{10}$)

پس دیگر لازم نیست به آن عدد یک را اضافه کنیم .

$$m=\left[\frac{a}{10}\right]$$

اثبات

فرض کنیم $M=\sum_{i=0}^{r}10^{i}a_i$ عددی طبیعی باشد و $a=a_0^2-10\left[\frac{a_0^2}{10}\right]$.

در اینصورت با فرض $S=\sum_{i=1}^{r}10^{i-1}a_i$ داریم :

$$\begin{aligned}
M^2=(a_0+10s)^2&=(a_0+10s)^2-a+a\\
&=10\left(\frac{(a_0+10s)^2-a}{10}\right)+a\\
&=10\left(\frac{a_0^2+100s^2+20a_0s-a}{10}\right)+a\\
&=10\left(\frac{a_0^2-a}{10}+10s^2+2a_0s\right)+a\\
&=10\left(\frac{a_0^2-a}{10}+s(10s+2a_0)\right)+a\\
&=10\left[\frac{a_0^2-a}{10}+s(10(s-1)+2a_0+10)\right]+a\\
&=10\left[\frac{a_0^2-a}{10}+20\times\frac{s(s-1)}{2}+s(2a_0+10)\right]+a\\
&=10\left[\frac{a_0^2-a}{10}+20\sum_{i=1}^{s-1}i+s(2a_0+10)\right]+a
\end{aligned}$$

نکاتی برای تشخیص اعداد مربّع کامل

اعداد مربع دارای خصوصیاتی از قبیل زیر می باشند :

این خصوصیات شرطهای لازم هستند نه کافی . یعنی این گمان پیش نیاید که اگر عددی شرطهای لازم را داشت حتماً مربع عددی است ، بلکه این خصوصیات بیان می کند که اگر عددی شامل این خصوصیات نباشد اصلاً نمی تواند مربع عددی باشد.

1. در مربع عددی رقم یکان نمی تواند 2 ، 3 ، 7 و 8 باشد .
2. در مربع عددی اگر رقم یکان 5 باشد رقم دهگان حتماً باید 2 باشد و رقم صدگان حتماً باید زوج باشد .
3. در مربع عددی اگر رقم یکان 1 باشد حتماً باید رقم دهگان عددی زوج باشد .
4. در مربع عددی اگر رقم یکان 4 باشد حتماً باید رقم دهگان عددی زوج باشد .
5. در مربع عددی اگر رقم یکان 9 باشد حتما باید رقم دهگان عددی زوج باشد .
6. در مربع عددی اگر رقم یکان 6 باشد حتما باید رقم دهگان عددی فرد باشد .
7. در مربع عددی اگر رقم یکان صفر باشد دهگان باید حتما صفر باشد .
8. در مربع عددی اگر رقم دهگان یکی از اعداد 1 ، 3 ، 5 ، 7 و 9 باشد رقم یکان حتماً باید 6 باشد .
9. در مربع عددی اگر رقم یکان یک باشد و رقم دهگان 0 ، 4 ، 8 باشد حتماً باید رقم صدگان عددی زوج باشد .
10. در مربع عددی اگر رقم یکان یک باشد و رقم دهگان 2 و 6 باشد حتماً باید رقم صدگان عددی فرد باشد .
11. درمربع عددی اگر رقم یکان 9 باشد و رقم دهگان 0 و 8 باشد حتماً باید رقم صدگان زوج باشد .
12. در مربع عددی اگر رقم یکان 9 باشد و رقم دهگان 2 و 6 باشد حتماً باید رقم صدگان فرد باشد .

توضیح :

مطالب بالا از آنجایی نتیجه گرفته شد که رقم یکان و دهگان مربع اعداد 100 تا 100 تا تکرار می شود پس کافی بود ما بر روی اعداد مربع 1 تا 100 آزمایش کنیم و نتایج فوق را به دست آوریم که برای هر عددی درست است و رقم صدگان مربع اعداد 1000 تا 1000 تکرار می شود پس کافی بود ما بر روی اعداد مربع 1 تا 1000 آزمایش کنیم و نتایج فوق را بدست آوریم که برای هر عددی درست است .

تکرار به سمت بی نهایت

در مبحث های قبل درباره مربع اعداد بیان شد که رقم یکان 10 تا 10 تا و رقم دهگان 100 تا 100 تا و رقـم صـدگان 1000 تا 1000 تا تکرار می شود . حال می خواهیم این مطلب را گسترش داده و به صورت یک قانون تبدیل کنـیم . در مربـع اعـداد نکته جالبی که قابل مشاهده است این است که رقم هزارگان 10000 تا 10000 تا و رقم ده هزارگان 100000 تـا 100000 تا تکرار می شود و در کل رقم n ام به صورت $10n$ تا $10n$ تا تکرار می شود از مطالب گفته شد در بالا ، می توان این نتیجه را گرفت که اگر ما یک عدد n رقمی داشته و K رقم اول از سمت راست آن را احتیاج داشت باشیم لازم نیست که حتمـاً مربـع عدد n رقمی را به دست آوریم بلکه اگر k رقم اول از سمت راست عـدد n رقمـی را برداشـته و مربـع آن را بدسـت آورده و سپس k رقم اول از سمت راست k^2 را برداریم و این k رقم ، همان مقدار خواسته شده است .

کاربرد

از مطالب گفته شده در بالا می توانیم این استفاده را ببریم که اگر ما از مربع یک عدد n رقمی ، k رقم اول از سمت راسـت آن را احتیاج داشتیم به صورت زیر عمل می کنیم که ابتدا آن k رقم را به توان 2 رسانده و سپس k رقم از سـمت راسـت مربـع k برداشته و این k رقم همان مقدار خواسته شده است .

z , y , x اعداد معلوم

z یکان و y رقم k ام و x رقم n ام

$$\underbrace{(x \ \dots \ \underbrace{y \ \dots \ z}_{k\ \text{رقم}})^2}_{n\ \text{رقم}} = \dots \ \underbrace{y' \ \dots \ z'}_{k\ \text{رقم}}$$

z' یکان و y' رقم k ام

$$(\underbrace{y \ \dots \ z}_{k\ \text{رقم}})^2 = \dots \ \underbrace{y' \ \dots \ z'}_{k\ \text{رقم}}$$

روش بالا برای استفاده محاسباتی که تعداد رقم ها بسیار زیاد است می تواند استفاده شود و ما می توانیم به روش بالا اصـطلاحاً آن را بشکنیم تا مقدار عددهای لازم از مربع آن را به دست آوریم .

به دست آوردن مربع یک عدد بـا توجـه بـه روابط بین اعداد و مربع اعداد

در عدد $\overline{a_n \;\ldots\; a_۲a_۱a_۰}$ با حذف رقم یکان ، و مربع کردن آنچه باقی می ماند ، می توانیم مربـع خـود عـدد را بـه دسـت آوریم . به این ترتیب دو رقم یکان و دهگان را از همنهشتی به پیمانه 100 بـه دسـت آورده و بقیـه ی آنـرا بـا اضـافه کـردن مقداری (r) به مربع $(\overline{a_n \;\ldots\; a_۱})^۲$ خواهیم داشت .

$$r = na_۰ + r_۰ \qquad\qquad n = \left[\frac{\overline{a_n \;\ldots\; a_۲a_۱a_۰}}{۵۰}\right]$$

جدول مقدار اولیه ($r_۰$)

	۵۱−۶۰ / ۰−۱۰	۶۱−۷۰ / ۱۱−۲۰	۷۱−۸۰ / ۲۱−۳۰	۸۱−۹۰ / ۳۱−۴۰	۹۱−۱۰۰ / ۴۱−۵۰
۱	۰	۰	۰	۰	۰
۲	۰	۰	۰	۱	۱
۳	۰	۰	۱	۱	۲
۴	۰	۰	۱	۲	۳
۵	۰	۱	۲	۳	۴
۶	۰	۱	۲	۳	۵
۷	۰	۱	۳	۴	۶
۸	۰	۲	۳	۵	۷
۹	۰	۲	۴	۶	۸
۱۰	۰	۰	۰	۰	۰

مثال

$(۴۵۱۲)^۲ = ?$

$(۴۵۱)^۲ = ۲۰۳۴۰۱$

$n = \left[\frac{۴۵۱۲}{۵۰}\right] = ۹۰ \qquad r_۰ = ۰ \qquad r = ۹۰ \times ۲ + ۰ = ۱۸۰$

$۲۰۳۴۰۱ + ۱۸۰ = ۲۰۳۵۸۱$

$(۴۵۱۲)^۲ = ۲۰۳۵۸۱\underline{۴۴}$

مثال

$(۷۱۳)^۲ = ?$

$(۷۱)^۲ = ۵۰۴۱$

$n = \left[\frac{۷۱۳}{۵۰}\right] = ۱۴ \qquad r_۰ = ۰ \qquad r = ۱۴ \times ۳ + ۰ = ۴۲$

$۵۰۴۱ + ۴۲ = ۵۰۸۳$

$(۷۱۳)^۲ = ۵۰۸۳\underline{۶۹}$

مثال

$(۷۸۹۵۲)^۲ = ?$

$(۷۸۹۵)^۲ = ۶۲۳۳۱۰۲۵$

$n = \left[\frac{۷۸۹۵۲}{۵۰}\right] = ۱۵۷۹ \qquad r_۰ = ۰ \qquad r = ۱۵۷۹ \times ۲ + ۰ = ۳۱۵۸$

$۶۲۳۳۱۰۲۵ + ۳۱۵۸ = ۶۲۳۳۴۱۸۳$

$(۷۸۹۵۲)^۲ = ۶۲۳۳۴۱۸۳\underline{۰۴}$

مثال

$(۷۸۲۴)^۲ = ?$

$(۷۸۲)^۲ = ۶۱۱۵۲۴$

$n = \left[\frac{۷۸۲۴}{۵۰}\right] = ۱۵۶ \qquad r_۰ = ۱ \qquad r = ۱۵۶ \times ۴ + ۱ = ۶۲۵$

$۶۱۱۵۲۴ + ۶۲۵ = ۶۱۲۱۴۹$

$(۷۸۲۴)^۲ = ۶۱۲۱۴۹\underline{۷۶}$

مثال

$(۶۵۷۴)^۲ = ?$

$(۶۵۷)^۲ = ۴۳۱۶۴۹$

$n = \left[\frac{۶۵۷۴}{۵۰}\right] = ۱۳۱ \qquad r_۰ = ۱ \qquad r = ۱۳۱ \times ۴ + ۱ = ۵۲۴ + ۱ = ۵۲۵$

$۴۳۱۶۴۹ + ۵۲۵ = ۴۳۲۱۷۴$

$(۶۵۷۴)^۲ = ۴۳۲۱۷۴\underline{۷۶}$

یافتن ارقامی از مربع یک عدد

رقم $n+1$ ام عدد $(\overline{a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0})^2$ را می توانیم به راحتی با داشتن رقم $n+1$ ام $(\overline{a_{n-1} \ldots a_1 a_0})^2$ بیابیم .

رقم $n+1$ ام برابر است با رقم یکان عدد روبرو :

$2a_n a_0 + ((\overline{a_{n-1} \ldots a_0})^2$ رقم $n+1$ ام)

اثبات

$$(\overline{a_n a_{n-1} \ldots a_0})^2$$
$$= (10^n a_n + (\overline{a_{n-1} \ldots a_0}))^2$$
$$= 10^{2n} a_n^2 + 2\times 10^n a_n \times (\overline{a_{n-1} \ldots a_0}) + (\overline{a_{n-1} \ldots a_0})^2$$
$$\overset{10^{n+1}}{\equiv} 2\times 10^n a_n \times a_0 + (\overline{a_{n-1} \ldots a_0})^2$$

مثال

رقم پنجم مربع عدد 78352 را بنویسید .

$a_4 = 7 \qquad a_0 = 2$

رقم پنجم مربع عدد 8352 برابر <u>5</u> است .

$(8352)^2 = 69755904$

$2\times a_0 \times a_4 + (a_3 \ldots a_0)^2$ رقم $n+1$ ام عدد

$2\times 2\times 7 + 5 = 28 + 5 = 33 \overset{10}{\equiv} 3$

مثال

رقم چهارم مربع عدد 25612 را بنویسید .

$a_3 = 5 \qquad a_0 = 2$

رقم چهارم مربع عدد 612 برابر <u>4</u> است .

$(612)^2 = 374544$

$2\times 2\times 5 + 4 = 20 + 4 = 24 \overset{10}{\equiv} 4$

مثال

رقم ششم مربع عدد 7813567 را بنویسید .

$a_5 = 8 \qquad a_0 = 7$

رقم ششم مربع عدد 13567 برابر 0 است .

$(13567)^2 = 184063489$

$2\times 7\times 8 + 0 = 112 \overset{10}{\equiv} 2$

یافتن رقم دهگان از مربع یک عدد

رقم دهگان عدد $(\overline{a_n a_{n-1} \ \dots \ a_1 a_0})^2$ را می توانیم به راحتی با داشتن رقم دهگان a_0^2 بیابیم .

رقم دهگان برابر است با رقم یکان عدد روبرو : (رقم دهگان $(a_0^2$ + $2a_1a_0$

اثبات

$$(\overline{a_1a_0})^2 = (10a_1 + a_0)^2 = 100a_1^2 + 20a_1a_0 + a_0^2 \overset{10^2}{\equiv} (2a_1a_0)\times 10 + a_0^2$$

مثال

رقم دهگان مربع عدد 78356234 را بنویسید .

1 = رقم دهگان 16 = رقم دهگان a_0^2 $\qquad a_1 = 3 \qquad a_0 = 4$

$2\times 3\times 4+1=25\overset{10}{\equiv}5$ $\qquad$ رقم دهگان $2a_1a_0 + a_0^2$

مثال

رقم دهگان مربع عدد 793563783542 را بنویسید .

0 = رقم دهگان 4 = رقم دهگان a_0^2 $\qquad a_1 = 4 \qquad a_0 = 2$

$2\times 4\times 2+0=16\overset{10}{\equiv}6$

مثال

رقم دهگان مربع عدد 783549627132567 را بنویسید .

4 = رقم دهگان 49 = رقم دهگان a_0^2 $\qquad a_1 = 6 \qquad a_0 = 7$

$2\times 6\times 7+4=84+4=88\overset{10}{\equiv}8$

یافتن رقم صدگان از مربع یک عدد

رقم صدگان عدد $(\overline{a_n a_{n-1} \ \dots \ a_2 a_1 a_0})^2$ را می توانیم به راحتی با داشتن رقم صدگان $(\overline{a_1 a_0})^2$ بیابیم .

رقم صدگان برابر است با رقم یکان عدد روبرو : $2a_2a_0 +$ (رقم صدگان $(a_1a_0)^2$)

مثال

رقم صدگان مربع عدد 783512 را بنویسید .

$a_0 = 2 \qquad a_2 = 5$

1 = رقم صدگان 144 = رقم صدگان $(a_1a_0)^2$

$2\times5\times2+1=21\overset{10}{\equiv}1$

مثال

رقم صدگان مربع عدد 537864321 را بنویسید .

$a_0 = 1 \qquad a_2 = 3$

4 = رقم صدگان 441 = رقم صدگان $(a_1a_0)^2$

$2\times3\times1+4=10\overset{10}{\equiv}0$

مثال

رقم صدگان مربع عدد 29687835674293152 را بنویسید .

$a_0 = 2 \qquad a_2 = 1$

7 = رقم صدگان 2704 = رقم صدگان $(a_1a_0)^2$

$2\times1\times2+7=11\overset{10}{\equiv}1$

بسمه تعالی

دانشگاه فردوسی مشهد

دانشکده علوم ریاضی

شماره: ۵۴۰۲ د ر

تاریخ: ۸۴/۳/۲۵

پیوست: ——

همکارمحترم جناب آقای سلطا ن زاده

باسلام ، بدینوسیله به اطلاع می رساند انجام طرح دانش آموزی آقایان عباس پرونده و میلاد معین الدینی ، تحت عنوان مجذور اعداد بزرگ باشرط انجام و رعایت موارد زیر در حد ارائه در جشنواره دانش آموزی خوارزمی خواهد بود.

۱- صحت الگوریتم ارائه شده

۲- متناهی الگوریتم ارائه شده

۳- برنامه کامپیوتری مربوطه

لذا با توجه به انجام موارد فوق یکماه تمدید مهلت تحویل ، لازم است

باتشکر

احمدعرفانیان

عضو هیئت علمی گروه ریاضی دانشگاه فردوسی مشهد

نشانی:
مشهد، میدان آزادی
پردیس دانشگاه فردوسی
دانشکده علوم ریاضی
صندوق پستی: ۱۱۵۹-۹۱۷۷۵
تلفن: ۸۶۲۸۶۰۰۰۴
نمابر: ۸۶۲۸۶۰۹
نشانی الکترونیکی:
sms@ferdowsi.um.ac.ir