حساب

حساب و تاریخچه آن

واژه «حساب » از « محاسبه » می آید. در زبان های اروپایی، به آن «آریتمه تیک» (Arithmetic) می گویند که از واژه یونانی «آریتموس» (به معنای عدد) می آید. در زبان فارسی، دو کتاب از «محمد» فرزند ایوب طبری، اهل آمل مازندران، به نام های «شمارنامه» و «مفتاح المعلومات» در دست است که در سده های چهارم و پنجم هجری نوشته شده است. محمد ایوب طبری «شمار» را به جای حساب و «شمارنامه» را به معنای «کتاب حساب» گرفته است. «شمار» یا «شمر» از زبان پهلوی ساسانی آمده که گاهی هم «مر» می گفته اند. بنابراین، می توان در زبان فارسی، واژه نادرست ریاضیات را که از واژه ریاضت آمده است و از مضمون این دانش هیچ نشانی ندارد به « راز و مر» تبدیل کرد. راز که در واژه های تراز و ترازو آمده است، به معنای مقایسه کردن و مر به معنای محاسبه کردن است، که روی هم، مضمون و جوهر ریاضیات (دست کم به معنای نخستین آن) را می رساند.

از ابوریحان بیرونی هم کتابی باقی مانده (به زبان های فارسی و عربی) به نام «التفهیم» که گرچه درباره اختر شناسی است ولی در پیش درآمد آن عمل های مربوط به حساب شرح داده شده است. این کتاب ها (شمار نامه، التفهیم و مفتاح المعلومات) جز آشنایی با دانش ریاضی، ما را با برخی اصطلاح های فارسی مانند افزودن (به جای جمع) کاستن (به جای تفریق) زدن (به جای ضرب) و جز آن آشنا می کند.

حساب، دانش عدد، عمل های مربوط به آن و بیان ویژگی های عدد است. در زندگی روزانه، در هر گامی که بر می

داریم به حساب نیازمندیم. فرهنگ انسانی را بدون «حساب » و « عدد » نمی توان تصور کرد به این دلیل است که هر انسانی باید دست کم، از مقدمه های دانش حساب، آگاه باشد. حساب کهن ترین بخش از دانش ریاضی است و سرچشمه های آن باید در ژرفای تاریخ بشر جست و جو کرد. بسیاری از قوم ها و ملت های باستانی، از جمله ایرانی ها، مصری ها و چینی ها، بابلی ها و عیلامی ها (که در جنوب و جنوب غربی ایران زندگی می کردند و امپراتوری بزرگی تشکیل دادند) و حتی قوم هایی از ساکنان بومی امریکا مانند مایاها و آزتک ها، با حساب کار می کردند.

آنها، به حساب، برای شمردن و اندازه گرفتن چیزها (از هر نوعی که باشد) نیازمند بودند. از جمله، مصری ها برای محاسبه تعداد و اندازه سنگ هایی که در ساختن هرم ها به کار می بردند نیاز داشتند؛ همچنین ارتفاع هرم، سطح قاعده آن و حجم هرم را محاسبه می کردند.

مروری بر تاریخ پیدایش عدد

در آغاز، عدد به صورت محدود خود بود. حتی عدد را تا 2 بیشتر نمی توانستند بشمارند. برای عدد، مرزی برای شمار داشتند. برای نمونه زمانی در بسیاری جاها مرز شمار عدد 6 بود. تا 6 می شمردند و پس از آن را می گفتند « بسیار ». هنوز هم در بسیاری زبان ها « هفت » به معنای بسیار است. در زبان فارسی ضرب المثلی است که می گوید:« هفت بار گز کن، یک بار پاره کن»(پیش از رایج شدن دستگاه متری، گز و ذرع واحد اندازه گیری طول در ایران بود که تقریباً برابر 1/04 متر است.) در این ضرب المثل منظور این نیست که درست هفت بار عمل کن؛ بلکه منظور این است که پس از عمل « بسیار » نتیجه بگیر. در این جا « هفت » به معنای بسیار است.

یا در زبان روسی ضرب المثلی است به این مفهوم که « هفت نفر منتظر یک نفر نمی مانند» باز هم هفت به معنای بسیار به کار رفته است یعنی تعداد زیادی منتظر یک نفر نمی مانند. در قصه های کودکان، وقتی از پادشاهی صحبت می شود که در قصری زندگی می کرد که هفت برج و بارو داشت، باز منظور این است که این قصر، برج و باروهای بسیار داشت. هفت دریا، هفت سرزمین، هفت آسمان و . . . همه جا هفت به معنای بسیار است.

عدد سیزده هم چنین سرنوشتی دارد. دوازده را «دوجین » می گفتند و چون پس از آن را نمی شناختند، روی آن نام « دوجین شیطانی» گذاشتند. از این جا عدد سیزده نحس شد چرا که پس از دوازده برای آنها ناشناخته بود و خبر از ابهام و تاریکی می داد. البته پیش آمدها یا روایت هایی هم به نحسی سیزده کمک کرد مانند روایتی که در «شام آخر » نفر سیزدهم به عیسای مسیح خیانت کرد و او را لو داد وگرنه، عدد **13** با عددهای دیگر هیچ تفاوتی ندارد. نمونه های دیگری هم از این گونه برای برخی عددها داریم. چهل چراغ به معنای درست **40** چراغ نیست، هزار پا به معنای این نیست که این جانور **1000** پا دارد.

برخی عددها هم نشانه عدد شماری بوده است. دست پنج انگشت دارد و اغلب چیزها را به یاری انگشتان دست و پا می شمرده اند. واژه پنج از واژه پنجه گرفته شده است، زیرا پنجه دارای 5 انگشت است. در زبان فارسی، واژه سی با واژه سه هم ریشه است. همین طور چهل با چهار و پنجاه با پنج و . . . ولی واژه بیست، هیچ ربطی به واژه دو ندارد. این نشانه آن است که عدد **20** به معنای مجموعه انگشتان دست و پاست و در زمان های دور مبنای عدد شماری بوده است. در زبان فرانسوی به

بیست می گویند «ون» که هیچ ربطی به (deux = دو) ندارد. به جز آن به هشتاد می گویند « چهار بیست تا » و به نود می گویند « چهار بیست تا و ده تا » تنها در دوره ای از پیشرفت تمدن به بی پایان بودن عددهای طبیعی پی بردند و به عنوان نمونه، اقلیدس (سده سوم پیش از میلاد) ثابت کرد تعداد عددهای اول ، بی نهایت است.

دستگاه متری از کجا و در چه زمانی معمول شد؟

پیش از آن که دستگاه متری در جهان و بعد در ایران رایج شود، واحدهای اندازه گیری از نقطه
ای به نقطه دیگر تغییر می کرد و به همین مناسبت، رابطه بین ملت ها دشوار بود. نخستین واحدها به وزن چیزهای مختلف مربوط بود و تعیین اندازه مسافت ها و بیشتر اندازه ها با نمونه برداری از بدن انسان انجام می گرفت.

بعدها برای شمارش از انگشتان دست و پا استفاده می کردند. برای اندازه گیری فاصله ها آنها را با گام های خود می شمردند. هنوز هم وقتی نیاز به وقت نباشد از گام ها برای اندازه فاصله های کم استفاده می شود. مردم قدیم، دو هزار گام را که شامل هزار گام دوتایی بود، یک میل می نامیدند. وقتی فاصله زیاد بود آن را به « محل های استراحت » یا «روزها » تقسیم می کردند؛ مانند پنج منزل راه، ده روز فاصله، اگر به اندازه های کوچک و دقت بیشتر نیازمند بود آن را با کف دست اندازه می گرفتند که در ایران به آن « وجب » گفته می شود.

برای فاصله های کم، اندازه کف پا را معیار می گرفتند. واژه انگلیسی «فوت » (یعنی پا) از همین جا آمده است. برای اندازه های کوچکتر ازعرض انگشت استفاده می کردند. بسیاری از ملت های کهن، از واحد

«آرنج » استفاده می مردند. (مانند مصر و بابل) « ارش » در زبان فارسی، همین واحد «آرنج» است . یک «ارش» یا «آرنج» به طور طبیعی عبارت است از نوک انگشت میانه تا آرنج. در بین بابلی ها هر آنج برابر با 30 عرض انگشت بود. در هند رایج ترین وسیله اندازه گیری طول « قد یک انسان متوسط » بود.

در روسیه از فاصله بین دو انتهای دست های باز استفاده می کردند. در سده دوازدهم میلادی به فرمان هانری اول در انگلستان برای واحد طول « یارد » رسم شد. درباره سرچشمه این واحد دو روایت وجود دارد. بنا به روایت اول « یارد » عبارت بود از انتهای بینی هانری اول تا انتهای انگشت میانه او؛ به شرطی که دستش را به طرف جلو دراز کرده باشد. بنا به روایت دوم « یارد » را به اندازه طول شمشیر شاهی انتخاب کرده بودند.

در ایران واحد طول «گز» یا « ذرع » بود که به تقریب برابر 1/04 متر است. گره $\frac{1}{16}$ذرع و « بهر» $\frac{1}{2}$ گره بود.

برای فاصله های بزرگ از فرسنگ یا فرسخ استفاده می کردند که به تقریب برابر 6 کیلومتر بود. ملت های مختلف واحد های متفاوتی برای طول داشتند که اغلب بستگی به چیزهایی داشت که با آنها سروکار داشتند. از جمله در سبیری، ساکنان ساحل آموز برای محاسبه طول، واحدی به نام «ابوکا » داشتند که به معنای فاصله ای بود که از آن جا می شد شاخ گاو را تشخیص داد. هنوز هم چنین واحدهایی وجود دارد: یک خروس خوان راه، یعنی فاصله ای که از آن جا به زحمت صدای خروس شنیده می شود.

روستائیان آلمان واحدی دارند که به معنای اندازه ای است که کمان می تواند یک تیر به آن جا رها کند. در

پاریس واحد طول پیش از دستگاه متری عبارت بود از «تواز» (toise) که شش برابر «پید» (pied) بود. پید برابر با **12** «پوس» (pouce) و واحدهای سه برابر پید و هفت برابر پوس هم وجود داشت.

این نمونه ها دشواری و پیچیدگی دستگاه قدیمی را نشان می دهد که بجز آن باید اختلاف بین واحدهای کشورهای گوناگون را هم به این دشواری اضافه کرد. در دوران ما بسیاری از ملت ها به جای دستگاههای متفاوت اندازه گیری طول از دستگاه متری استفاده می کنند که برای نخستین بار در سده هجدهم و به فرمان رهبران انقلاب کبیر فرانسه به وجود آمد که دستگاهی به مراتب ساده تر و راحت تر و با دستگاه عدد نویسی دهدهی مطابقت دارد. بنابر دستگاه متری مبنای طول عبارت است از متر. یک متر برابر با یک چهل میلیونیم اندازه نصف النهار زمین است که از پاریس گذشته باشد. بعدها با اندازه گیری دقیق تر معلوم شد که یک چهارم نصف النهار پاریس اگر با واحد متر اندازه گرفته شود به جای ده میلیون متر، ده میلیون و هشتصد و پنجاه و شش متر است. ولی واحد متر را تغییر ندادند؛ زیرا دیگر دستگاه متری در بیشتر جاهای جهان معمول شده بود. واژه متر از روی واژه یونانی متردن ساخته شده است که در زبان فارسی به معنای « اندازه » است.

اساس دستگاه متری بر اندازه گیری کمانی از نصف النهاری که بین بارسلون و دونکرک واقع است، نهاده شده است. این ماموریت را « دالامبر » و « مه شن » در جریان چند سال همراه با دشواری ها و زحمت های بسیار انجام دادند. نمونه « متر » را از دو گونه فلز گران قیمت (**90** درصد طلای سفید و **10** درصد اری دیوم) ساختند؛ به نحوی که در محیط قلیایی و در مجاورت هوا، اکسیده نشود. برش عرضی این نمونه به شکل x (ایکس)

است و در « پسوره » واقع در نزدیکی پاریس در مرکز جهان « اوزان و مقادیر » نگهداری می شود. در کشور ما ایران طبق قانونی که در 18 ماه 1318 از مجلس شورای ملی گذشت، دستگاه متری به رسمیت شناخته شد.

پیدایش صفر و عددهای امروزی

پس از عددهای طبیعی، باید به تاریخ صفر و عددهای دهدهی بپردازیم. در یونان قدیم، از حرف های الفبا برای بیان استفاده می کردند:

α (آلفا 1) β (بتا 2) γ (گاما 3) و . . .

در روم قدیم، از حروف الفبا، با تلفیق عمل های جمع و تفریق استفاده می شد:

M (ام 1000) D (د 500) C (سی 100) L (ال 50) X (ایکس 10) V (و5) I (ای 1)

عددهای 2 و 3 را با تکرار عدد I عدد 4 را به صورت IV و عدد 6 را به صورت VI نشان می دادند. وقتی عدد I در سمت چپ V باشد به معنای « 1-5 » و وقتی در سمت راست آن باشد به معنای « 1+5 » است. همین قانون برای بقیه عددها هم رعایت می شد برای نمونه عدد 90 به صورت XC و عدد 110 به صورت CX نوشته می شد. این عدد نویسی تا امروز هم حفظ شده است و برای نشان دادن رقم ها در ساعت و در برخی حالت ها (از جمله برای صفحه گذاری در پیشگفتار کتاب) و برای بیان سده ها و غیر آن، به کار می رود.

در ایران و به ویژه در بین شاعران ایرانی، نوعی عدد نویسی به یاری حرف های الفبا معمول است و به آن « حساب جمله ها » یا « حساب جمل » می گویند و بیشتر برای بیان تاریخ های مهم به کار می رود. وقتی تاریخ یک رویداد را با یک واژه یا یک جمله بیان کنند به آن « ماده تاریخ » می گویند. حرف های الفبای « عربی -

فارسی » را به صورت واژه های سه حرفی و چهار حرفی درآورده اند (که البته هیچ معنای ندارند) و به هر حرف، عددی را نسبت داده اند.

تاریخ پیدایش «حساب ابجد » یا حساب « حساب جمله ها » روشن نیست؛ ولی به احتمال از سده های نخست هجری و به احتمال زیاد به وسیله ایرانیان درست شده است. از جمله حافظ، شاعر غزل سرا، تاریخ کشته شدن شاه شیخ ابواسحاق شیرازی را در این بیت زیبا آورده است :

«بلبل» و «سرو» و «سمن» «یاسمن» و «لاله» و «گل»

هست تاریخ وفات شه مشکین کاکل که با حساب ابجد بدست می آید:

50= گل، 66 = لاله ، 161= یاسمن، 150= سمن، 266= سرو،

64= بلبل

و مجموع این عددهای 757 سال کشته شدن ابواسحاق است. البته در عربی حرف «گ » نداریم؛ بنابراین در واژه گل به جای گ از ک استفاده شده است. در مصر کهن از دستگاه دهدهی (غیر موضعی) استفاده می کردند. ولی در بابل قدیم به ویژه در محاسبه های اختر شناسی از دستگاه شصت شصتی (دستگاه عدد نویسی با مبنای 60) استفاده می کردند. برای نمونه عدد 133 را به صورت60+ 2×13 می نوشتند. در هزاره اول پیش از میلاد، بابلی ها به عدد نویسی موضعی دست یافتند. این عدد نویسی در مبنای شصت بود و در آغاز برای صفر نمادی نداشتند و بنابراین برای نمونه نمی شد عددهای 13 یا 103 یا $1\frac{3}{60}$ را از یکدیگر تشخیص داد ولی بعدها برای صفر هم نمادی در نظر گرفتند. اما عدد نویسی بابلی فراموش شد و چنان که دیدیم، یونانی ها به عدد نویسی با حرف ها الفبا روی آوردند. هندی ها یک بار دیگر عدد نویسی

موضعی را کشف کردند که این بار در مبنای 10 بود و نمادی هم برای صفر داشتند.
این کشف در هزاره اول میلادی به دست آمد که درآغاز هندی ها در نوشته های علمی خود از آن استفاده می کردند.کشف هندی ها در زمینه عدد نویسی موضعی دهدهی، به وسیله ایرانی ها به اروپا راه یافت. کتاب « محمد » فرزند «موسا خوارزمی » به نام «حساب هندی»(که ترجمه لاتینی آن باقی مانده است.) ترجمه و در دسترس ریاضیدانان اروپایی قرار گرفت. کار با عددهای موضعی دهدهی، به تدریج (و البته به کندی) در تمامی اروپا و جهان پذیرفته و عدد نویسی های پیش از آن، کم و بیش رها شد. هندی ها رقم صفر را پیشنهاد کردند که به جای مرتبه های خالی به کار می رفت. هندی ها به صفر « سونیا » می گفتند و خوارزمی آن را به زبان عربی « صفر » نامیدند. «شیفر» یا « تسیفر » که در زبان های امروز اروپایی به معنای رقم به کار می رود در آغاز به معنای صفر بود و از واژه صفر گرفته شده بود.
از جمله فیبوناچی در کتاب خود به نام کتابی درباره آباک یا چرتکه که در سال 1202 نوشته
شده است از این واژه برای صفر استفاده کرده است.
ولی در جریان زمان اروپایی ها از واژه
«شیفر » برای رقم های از 0 تا 9 استفاده کردند و صفر را نول خواندند.

واحدهای زمانی

در هر گام زندگی به شناسایی وقت نیاز داریم. ناخدایی که در دریا و اقیانوس کشتی را هدایت می کند، خلبانی که هواپیمای خود را در فضا جلو می راند، اخترشناسی که مسیر جسم های آسمانی را پی گیری می کند و . . . به زمان و وقت شناسی نیاز دارد.

واحد زمان چیست؟ این پرسش در ژرفای تاریخ بشر وجود داشت. طبیعی ترین واحد زمان « روز » بود که فاصله زمانی برآمدن (طلوع) و فرو رفتن (غروب) خورشید را در بر می گرفت روز واحدی بزرگ بود و لازم می شد آن را بشکنند و واحدهای کوچکتری برای زمان پیدا کنند.
از جمله کلدانی ها (قومی سامی در جنوب « میان دو رود » را تشکیل داد.) روز را به دوازده ساعت هر ساعت را به شصت دقیقه و هر دقیقه را به شصت ثانیه تقسیم کردند. واحدهای امروزی زمان هم از همین قانون پیروی می کنند. امروز زمان را با شبانه روز، ساعت، دقیقه و ثانیه اندازه می گیرند. شبانه روز خورشیدی، برابر است با فاصله زمانی دو عبور پشت سر هم خورشید از نصف النهار. بنابراین شبانه روز عبارت است از نیم روز تا نیم روز دیگر. اگر طول شبانه روز دقیق محاسبه شود، در جریان سال تغییر می کند؛ بنااربااین واحد زمان را میانگین شبانه روز خورشیدی گرفتند.
وسیله ای که زمان را با آن اندازه می گیرند ساعت نام دارد تاریخ پیدایش ساعت جالب و آموزنده است. کشف ساعت به ژرفای تاریخ برمی گردد. کلدانی ها، مصری ها، هندی ها، چینی ها، ایرانی ها و دیگر قوم ها در آغاز از ساعت های آفتابی و آبی استفاده می کردند. بسیاری از ملت ها ساعت شنی داشتند که هنوز هم کم و بیش رایج است. (به ویژه در پزشکی) در نتیجه کار دانشمندان و صنعتکاران ساعت مکانیکی ساخته شد. نشانه هایی در دست است که یکی از پسران موسا شاکر به نام احمد (که در علم حیل، یعنی مکانیک، دست داشته است) که خراسانی بود (و سه برادر به بنی موسا یا بنوموسا مشهورند) نخستین ساعت مکانیکی را ساخت. (در سده سوم هجری). در سده سیزدهم ساعت چرخ دار ساخته شد و در سده هفدهم گالیله (1642-1564) و هیوگنس

(1695-1629) بدون آگاهی از یکدیگر ساعت آونگ دار را ساختند و به آن جنبه علمی دادند. در سال 1767 میلادی ایوان پتروویچ تبین (1735-1818) ساعت مکانیکی بکر و ویژه ای ساخت که به شکل و اندازه یک تخم غاز بود. تونتن ایوانوویچ ولوسکو (1729-806) با کار سخت چهار ساله ساعتی ساخت که دقیقه، ساعت، ماه، جهت خورشید و برخی ستارگان دیگر را نشان می داد.

پیدایش کسر متعارفی

کسر متعارفی در جریان اندازه گیری و زمانی پدید آمد که ناچار شدند واحد اندازه گیری را بشکنند چرا که برای ادامه زندگی نتوانستند از واحد استفاده کنند. این موضوع به ویژه از پیدایش کسرهای مشخص پیش از پیدایش مفهوم کلی کسر روشن می شود. تنها از این راه است که می توان مفهوم هایی از نوع نیم من و یک چارک را روشن کرد.

زمان زیادی لازم بود تا نیم و یک چهارم به صورت $\frac{1}{2}$ و $\frac{1}{4}$ برای هر نوع واحدی (طول، حجم، وزن، زمان) به کار رود. تنها در هزاره دوم پیش از میلاد بود که بشر توانست از کسر همچون بخشی از واحد استفاده کند. در بابل کهن حتی نمادها خاصی برای برخی کسرهای متعارفی وجود داشت استفاده کند. بجز این در بابل به طور منظم از دستگاه شصت شصتی استفاده می کردند. برای نمونه کسر $\frac{7}{90}$ را به صورت $\frac{4}{60}+\frac{40}{60^2}$ نشان می دادند. مصری ها هم به صورت گسترده از کسرها استفاده می کردند. پاپیروس هایی که باقی مانده در این باره گواهی می دهند. در برخی پاپیروس ها از عمل های حسابی روی کسرها صحبت شده است. کهن ترین پاپیروس ریاضی که در دست است مربوط به عمل های حسابی روی عددهاست. پاپیروس مسکو

که مربوط به حدود **2000** سال پیش از میلاد است و در موزه هنرهای زیبای مسکو (موزه پوشکین) نگهداری می شود. پاپیروس دیگری به نام پاپیروس رایند که در موزه بریتانیا نگهداری می شود قدمتی **3700** ساله دارد.

از این دو پاپیروس می توان نتیجه گرفت مصری ها بر نوعی دستگاه محاسبه ای درباره کسرها تسلط داشته اند. روشن شده است مصری ها کسرهایی را ترجیح می داده اند که صورت آنها برابر واحد باشد (تبدیل کسرها به صورت کسرهایی که صورت واحد داشته باشند، منحصر به فرد نیست) برای نمونه کسر $\frac{2}{5}$ را به صورت مجموع دو کسر $\frac{1}{3}$ و $\frac{1}{15}$ در نظر می گرفتند و کسر $\frac{2}{13}$ را به صورت مجموع کسرهای $\frac{1}{8}$ و $\frac{1}{52}$ و **04** $\frac{1}{104}$. البته باید توجه کرد که آنها ضمن نوشتن، نماد جمع را نمی گذاشتند و در نوشته های آنها کسر $\frac{2}{5}$ به صورت ($\frac{1}{3}\,\frac{1}{15}$)، کسر $\frac{5}{6}$ به صورت ($\frac{1}{2}\,\frac{1}{3}$) و کسر $\frac{2}{13}$ به صورت ($\frac{1}{8}\,\frac{1}{52}\,\frac{1}{104}$) نشان داده می شد. کسرهای با صورت واحد را مصری ها با نماد بیضی نشان می دادند که به معنای «بخشی از» بود و زیر آن عدد مخرج را می نوشتند در این باره کسر **1/2** استثنا بود که با نماد نصف بیضی نشان داده می شد. یونانی ها هم کسرها را می شناختند. آنها برای نشان دادن صورت کسر پاره خطی کوتاه (َ) در سمت راست و بالای حرف نماینده عدد و برای مخرج کسر دو نشان کوتاه (ً) در نظر گرفته بودند بر اساس نشانه گذاری آنها کسر $\frac{7}{21}$ به این صورت نوشته می شد:

"$\beta'\chi\alpha$" که در آن β' نماینده صورت و "$\chi\alpha$" نماینده مخرج بود. در سده دهم میلادی ریاضیدانان ایرانی تقریباً از نمادهای امروزی استفاده می کردند. بعدها برای جدا شدن صورت از مخرج خط کسری را به کار بردند این نماد به وسیله فینوناچی در «کتابی درباره حساب» (سال 1202 میلادی) به اروپا رفت و به تدریج در اروپای غربی رایج شد.

پیدایش کسرهای دهدهی

در این بند به کوتاهی از پیدایش کسرهای دهدهی صحبت می کنیم. سرچشمه پیدایش کسرهای دهدهی را باید در کسرهای شصت شصتی بابلی دانست. از کسرهای شصت شصتی گاهی ریاضیدانان یونانی هم استفاده می کردند. بتلمیوس که در سده دوم میلادی زندگی می کرد از کسرهای شصت شصتی در نوشته معروف خود که ایرانی ها آن را «مجسطی » یعنی کتاب بزرگ می نامیدند استفاده کرده است. تا پیش از « جمشید کاشانی » ریاضیدانان ایرانی هم اغلب کسرهای شصت شصتی را در کنار عددهای موضعی هندی به کار می بردند. کسرهای دهدهی برای نخستین بار در سده پانزدهم میلادی (نهم هجری) به وسیله جمشید کاشانی ریاضیدان و اخترشناس ایرانی، که در سمرقند به کار ساختمان رصد خانه ای برای « الغ بیگ » مشغول بود در کتاب «رساله المحیطیه » و دیگری « مفتاح الحساب » است.

کاشانی کتاب دیگری هم درباره محاسبه سینوس یک درجه داشته که به آن خاطر معادله درجه سوم را از راه جبری حل کرده و جواب را با هر تقریب دلخواه به دست آورده است. گرچه خود این کتاب تاکنون پیدا نشده است؛ ولی « میر چلبی » در رساله خود راه حل کاشانی را شرح داده است [رساله میر چلبی، در کتاب «غیاث الدین جمشید کاشانی ریاضیدان ایرانی » چاپ شده است.] جمشید

کاشانی در رساله المحیطیه خود نسبت دو برابر طول محیط دایره را به قطر آن (یعنی عدد 2π) را ابتدا با عددهای شصت شصتی و سپس با عددهای دهدهی می دهد. او عدد 2π را به صورت شصت شصتی خود به این ترتیب محاسبه کرده است:

6 16 59 28 1 34 51 46 14 59

که برابر است با: $6+\frac{16}{60}+\frac{59}{60^2}+\frac{28}{60^3}+\frac{1}{60^4}+\frac{34}{60^5}+...$

کاشانی همین عدد را به صورت دهدهی آن هم می دهد:

6 283 185 307 179 5865

که به معنای این عدد است: $6+\frac{2}{10}+\frac{8}{10^2}+\frac{3}{10^3}+\frac{1}{10^4}+\frac{8}{10^5}+...$

امروز این عدد را این طور می نویسند:

6/2831853071795865

کاشانی در کتاب دیگر خود یعنی مفتاح الحساب هم عددهای دهدهی را بررسی می کند و در آن قانون های عمل روی این عددها را شرح می دهد. نیاز به کسرهای دهدهی در سده های شانزدهم و هفدهم با پیشرفت دانش و فن آوری بالا گرفت زمانی که دانشمندان ناچار بودندکارهای محاسبه ای طولانی را انجام دهند در این دوران وبود که کار تکمیل کسرهای دهدهی به پایان رسید و به صورت گسترده در محاسبه و عمل به کار رفت (از جمله برای تنظیم جدول های لگاریتمی) به این ترتیب در سده شانزده میلادی میخائیل شتیفل ریاضیدان آلمانی (1487–1567) در کتاب خود به نام حساب آلمانی کسر را به عنوان تعمیمی از مفهموم عدد شرح داد. او اندیشه خود را با این واژه ها بیان می کند: « چه اعتراضی می توان به کسی کرد که اعتقاد دارد، واحد قابل تقسیم نیست؟ من در پاسخ می گویم، این وضع تنها وقتی پیش می آید که نتوان حساب را بر اساس چیزهایی

بسازند که از هم جدا باشند و به صورت عددهای درست بیان شوند.»

« فرانسوا ویت » ریاضیدان فرانسوی را هم می توان از پیشگامان استفاده از عددهای دهدهی دانست. ویت کسرهای دهدهی را در کتاب خود به نام « دستورهای ریاضی » شرح می دهد که برای نخستین بار در سال 1579 میلادی چاپ شد. او عدد درست را با عدد پس از ممیز با حرف های چاپخانه ای کوچک و بزرگ، و گاهی با یک ویرگول (،) از هم جدا می کند. ولی «دستورهای ریاضی » ویت نتوانست در زمان خود به گستردگی مورد استفده قرار گیرد . بنابراین در اروپا او را به عنوان کسی که کسرهای دهدهی را کشف کرده است، نمی شناسند.

نخستین کسی که در اروپا به طور منظم از کسرهای دهدهی استفاده کرد و امروز به عنوان کاشف کسرهای دهدهی در اروپا شناخته می شود (چیزی که درست نیست) « سیمون سته ون » (1548- 1620) بود.

سته ون در کتاب La Disme خود (1585) نظریه کسرهای دهدهی را به تفصیل شرح می دهد

و اندیشه دستگاه اندازه ها را به یاری کسرهای دهدهی مطرح می کند.

سیمون سته ون برای نشان دادن کسرهای دهدهی در بالای رقم ها شماره ردیف آنها را می گذارد و برای نمونه عدد دهدهی 7/3247 را این طور نشان می دهد: $7^0 3^1 2^2 4^3 7^4$ جالب است بدانیم سته ون ضمن حل و بررسی مساله های مربوط به درصد به طور جدی به اندیشه عددهای دهدهی می رسد و برای محاسبه « درصد» حتی جدولی تنظیم می کند.

آنچه به کسرهای دهدهی متناوب مربوط است تنها در سده هفدهم به کتاب های علمی و در سده نوزدهم به کتاب های درسی یافت .یکی از نخستین کسانی که در نوشته های

او به کسرهای دهدهی متناوب برخورد می کنیم « کاوالیه ری » (1598-1647) ریاضیدان ایتالیایی است. او ضمن تبدیل کسرهای متعارفی به کسرهای دهدهی، به کسرهای متناوب رسید. کاوالیه ری مقدار تقریبی این کسرها را می نویسد و به تناوبی بودن نماد دهدهی آنها توجهی نمی کند.

کسی که به طور کلی به کسرهای بی پایان دهدهی و از آن جمله به کسرهای متناوب به طور منظم پرداخت « والیس » (1616-1703) ریاضیدان انگلیسی و استاد دانشگاه آکسفورد بود. در سال 1693 کتاب جبر خود را چاپ کرد که در یکی از فصل های آن به ویژگی های مهم کسرهای متناوب پرداخته است. او تأکید دارد که پیشینیان او به این ویژگی ها نپرداخته اند. والیس به این نتیجه می رسد که تقسیم صورت کسر بر مخرج آن وقتی تمام می شود که در مخرج توان هایی از 2 و 5 وجود داشته باشد.

اگر بین عامل های مخرج عددهای اول 2 و 5 وجود نداشته باشد دوره تناوب کسر دهدهی از همان رقم اول پس از ممیز آغاز می شود او همچنین از قضیه های ساده مربوط به تعداد رقم ها در تناوب آگاه بوده است. بسیاری از بررسی های مربوط به نظریه کسرهای متناوب در نیمه دوم سده هجدهم انجام گرفت. « لامبرت » (1728-1777) ریاضیدان و اخترشناس سویسی، در این باره خیلی کار کرد. یادآوری می کنیم، لامبرت، فرزند یک باربر فقیر بود که ریاضیات را پیش خود یاد گرفت. او در آغاز معلم بود و بعد دانشمند و عضو فرهنگستان علوم برلن شد.

درباره کسرهای متناوب « لئونارد اولرهم » کتابی چاپ کرده است.

«ابرتسون » ریاضیدان نوشتن کسرهای متناوب را به صورت نمادین بسیار ساده کرد. برای نمونه کسرهای متناوب ...0/333، ...0/232323، ...0/784784784 را به صورت (3)/0، (23)/0، و (784)/0 می نوشت. برای ضرب و تقسیم کسرهای دهدهی بی پایان او خواننده را به کسرهای متعارفی آنها راهنمایی می کند. نظریه کسرهای متناوب در آغاز شده نوزدهم و با کار یکی از بزرگترین ریاضیدانان آلمانی، یعنی « کارل فردریک گوس » در رابطه با کار او درباره نظریه عددها به پایان خود رسید.

نسبت و تناسب

مفهوم تناسب به عنوان دو نسبت برابر از عددهای طبیعی خیلی پیش و در ژرفای تاریخ پدید آمد. مردم ساکن « میان دو رود » با کشف مثلث های مشابه به تناسب ضلع آنها (البته با عددهای طبیعی) پی برده بودند. نخستین نظریه مربوطه نسبت های برابر را فیثاغورس (حدود 580 تا 500 پیش از میلاد) ریاضیدان یونانی و شاگردان او کشف کردند. آنها سه گونه تناسب را می شناختند: تناسب حسابی: a-b=c-d

تناسب هندسی: a:b = c:d تناسب همساز

(توافقی) : $\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{1}{c}-\frac{1}{d}$

از همین جا به میانگین حسابی، هندسی و همساز و تناسب هایی می رسیم که میانگین برابر دارند. در سده چهارم پیش از میلاد « اودوکس» (حدود 408- 355 پیش از میلاد) تناسب را نه تنها برای عددهای طبیعی (آن طور که فیثاغوریان به کار می بردند) بلکه برای عددهای کسری هم به کار برد. بد نیست بدانیم که اردوکس (که ایرانی ها به او اودوکسوس می گفتند) فرهنگ نویس زمان خود بود. او همچنین بر حرفه های گوناگونی تسلط

داشت؛ در اخترشناسی، ریاضیات و مکانیک. در ضمن، در پزشکی معتبر بود . نظریه دقیق تناسب را اقلیدس در حدود سده سوم پیش از میلاد در « مقدمات » مشهور خود که شامل سیزده کتاب است مطرح کرد. او نظریه تناسب ها را در کتاب پنجم خود داده است. اقلیدس، اساس نظریه خود را بر آموزش اودوکس قرار داده است. نظریه نسبت ها در زمان ما با نظریه اودوکس - اقلیدس بسیار کم تفاوت دارد. اقلیدس تناسب را این طور تعریف می کند: عدد های a،b، c و d تناسب $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ را تعریف می کنند وقتی که به ازای هر مقدار درست m و n برای داشته باشیم:

میانگین حسابی دو عدد برابر است با نصف مجموع آنها؛ میانگین هندسی دو عدد برابر با ریشه دوم حاصاضرب آنها و میانگین همساز دو عدد است با عدد 2 تقسیم بر مجموع عکس آنها. a و b را دو عدد مثبت می گیریم، در این صورت داریم : میانگین حسابی $\frac{a+b}{2}$

میانگین هندسی: جذر $\sqrt{ab}$

میانگین همساز : $\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$. گوس ثابت کرد (البته گوس، حالت کلی n عدد مثبت را در نظر می گیرد.)

$$\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \leq \sqrt{ab} \leq + \frac{a+b}{2}$$

که حالت برابری a=b پیش می آید. میانگین در زندگی و صنعت، کاربرد دارد. از جمله اگر اتومبیلی فاصله A تا B را با سرعت ثابت N_1 کیلومتر در ساعت و فاصله عکس آن B تا A را با سرعت ثابت N_2 کیلومتر در ساعت طی کند آنوقت سرعت میانگین حرکت اتومبیل در رفت و

برگشت برابر است با میانگین همساز دو سرعت:

$$N = \frac{2}{\frac{1}{N_1} + \frac{1}{N_2}}$$

اگر فرض کنیم یک تراکتور نصف زمینی را در t_1 ساعت و تراکتور دیگر نصف همان زمین را در t_2 ساعت شخم می کند در این صورت : $t = \frac{2}{\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2}}$

زمانی را نشان می دهد که دو تراکتور می توانند تمام زمین را شخم کنند.

میانگین ها، به ویژه در اقتصاد اهمیت جدی دارند. در تعیین ارزش کالا، میانگین کار را در نظر می گیرند، در تجزیه و تحلیل سود، میانگین سرمایه گذاری اهمیت دارد؛ در تعیین استهلاک، میانگین مدت کار ابزار ها را به حساب می آورند و . . .

در حالتی که مقدارهای جداگانه، اختلاف زیادی با هم نداشته باشند، انتخاب گونه های مختلف میانگین اهمیت جدی نمی یابد. ولی در حالتی که مقدارها با هم اختلاف جدی داشته باشند طبیعت موضوع نوع انتخاب میانگین را به ما تلقین می کند. برای یافتن میانگین تولید روزانه کارگران میانگین حسابی را به کار می گیرند؛ در حالی که برای به دست آوردن مقدار میانگین زمانی که برای تولید واحد محصول لازم است میانگین همساز را به خدمت می گیرند. برای تعیین آهنگ رشد سالیانه محصول یا جمعیت از میانگین هندسی استفاده می کنند و . . . باید توجه داشت که از به کار بردن میانگین های بی پایه پرهیز شود.

به کار بردن میانگین در حالت های بی معنا و نابجا، شبیه این است که اگر پاهای کسی در بخاری و سرش در آب سرد باشد نتیجه بگیریم که به طور میانگین احساس

خوبی دارد. گوس ثابت کرد اگر دو عدد A و B را در نظر بگیریم میانگین حسابی و هندسی آنها را به ترتیب A_1 و B_1 بنامیم سپس میانگین حسابی و هندسی A_1 و B_1 را به ترتیب A_2 و B_2 را A_3 و B_3 بنامیم و به همین ترتیب ادامه دهیم میانگین های حسابی و هندسی به طور دائم به هم نزدیک می شوند به نحوی که a_n و b_n در حد یعنی وقتی n به سمت بی نهایت میل می کند با هم برابر می شوند. گوس این مقدار حد را میانگین حسابی - هندسی نامید.

هندسه

هندسه

هندسه زاده نیاز انسان به اندازه گیری زمین است. واژه هندسه هم در تحلیل آخر به «اندازه گیری زمین» بر می گردد. بنابراین از دید تاریخی نخستین مفهوم های هندسی ضمن اندازه گیری زمین های کشاورزی پدید آمد. در چند هزار سال پیش از این، در بابل، منطقه مشهور به عیلام، مصر و دیگر سرزمین ها، هندسه شامل قاعده هایی برای اندازه گیری مساحت و مرزهای زمین های کشاورزی بود. در سده های بعد که داد و ستد کالا و صنعت پیش رفت، هندسه و مفهوم های آن هم پیچیده تر شد. در برابر هندسه دانان مساله هایی مطرح شد که مربوط به اندازه گیری حجم ظرف ها حجم جسم های مختلف و به طور کلی مساله های مربوط به شکل و اندازه های شکل های

گوناگون بود. در این جا نیاز به دقت، استدلال را پدید آورد و مفهوم هایی که با تجربه به دست آمده بود با منطق و استدلال توأم شد و دوران هندسه نظری فرا رسید.

نقش اساسی را در انتقال به دوره هندسه نظری، دانشمندانی از یونان باستان بازی کردند؛ تالس، دموکریت، اودکس، فیثاغورس، اقلیدس و دیگران که هندسه کاربردی پیش از خود را با منطق و استدلال همراه کردند و سرانجام در سده سوم پیش از میلاد، کم و بیش به صورت امروزی درآوردند؛ به ویژه نقش اصلی را در جمع آوری و تنظیم هندسه استدلالی، مدیون اقلیدس ریاضیدان یونانی هستیم.

او توانست در سده سوم پیش از میلاد، مفهوم های هندسی، تعریف آنها، و استدلال های مربوط به آنها را به صورت منظم در کتاب خود به نام « مقدمات » بیاورد. « مقدمات » اقلیدس نخستین کتابی است که توانسته است آموزش هندسه را به روالی منطقی و قابل فهم درآورد.

اعتبار کتاب اقلیدس از این جا معلوم می شود که در طول بیش از دو هزار سال که از زمان نوشتن آن می گذرد همه هندسه های مقدماتی یا عین کار اقلیدس و یا تحت تاثیر نوشته او بوده است.

در زمان ما هندسه شاخه ای از ریاضیات به شمار می آید که در آن درباره شکل ها، اندازه آنها و وضع قرار گرفتن آنها نسبت به هم و یا تبدیل آنها به یکدیگر بحث می کند.

تاریخ ساختمان های هندسی

نخستین ساختمان های هندسی، تاریخ کهن دارد. مفهوم های نخستین هندسی همان طور که گفتیم در مصر، چین، بابل و ایران (در امپراطوری عیلام در جنوب و جنوب غربی ایران کنونی) پدید آمد. این، زمینه را برای

یونانی ها فراهم کرد تا هندسه را سامان بخشند و به تدریج آن را منظم کنند و تعریف ها و قضیه های هندسی را به وجود آوردند. یونانی های باستان در نزدیک به هزار سال در یونان و سپس اسکندریه، چنان به هندسه پرداختند که تا درون هندسه عالی پیش رفتند. آنها حتی استدلال های حسابی و جبری را به یاری هندسه انجام می دادند و از محاسبه پرهیز داشتند. آنها به رسم شکل های هندسی، به یاری پرگار و خط کش پرداختند و استفاده از دیگر ابزار ها را برای حل مسأله ها، به ویژه مسأله های ساختمانی، هندسی، به شمار نمی آوردند.

یونانی ها از همان دوران کهن، به سه مسأله برخورد کردند که راهی برای حل آنها به یاری پرگار و خط کش نیافتند و این سه مسأله را غیر قابل حل اعلام کردند؛ این سه مسأله اینها بودند:

1- مسأله یافتن مکعبی که حجم آن دو برابر مکعب مفروض باشد (این مسأله بین ریاضیدانان ایرانی «تضعیف مکعب» نام گرفته است.) منظور ساختن ضلع مکعبی است که حجم آن دو برابر حجم مکعب داده شده باشد.

2- تقسیم زاویه به سه بخش برابر (تثلیث زاویه)؛ یعنی در حالت کلی، یک زاویه غیر مشخص را به سه بخش برابر تقسیم کرد.

3- مسأله یافتن مربعی که مساحت دایره مفروض باشد. (تربیع دایره) برای هر کدام از این مسأله ها، افسانه ای وجود دارد. برای نمونه درباره مسأله اول (تضعیف مکعب) افسانه هایی رواج دارد که یکی از آنها را در اینجا می آوردیم.

« هنوس » پادشاه تصمیم گرفت برای پسرش که مرده بود، بنایی بسازد. این بنا را به شکل مکعب ساختند؛ ولی پادشاه به نظرش بنا کوچک آمد. ضلع مکعب برابر 100

واحد بود هنوس دستور داد حجم بنا را دو برابر کنند معماران که خود از حل این مسأله عاجز ماندند، به دانشمندان ریاضیدان مراجعه کردند؛ ولی آنها هم نتوانستند این مسأله را حل کنند. امروز ثابت شده است که این مسأله ها را به یاری پرگار و خط کش نمی توان حل کرد و برای حل آنها به ابزار های دیگری باید متوسل شد. در «مقدمات» اقلیدس، بسیاری از مسأله های ساختمانی حل شده است؛ ولی همه این مسأله ها همراه با استدلال به یاری پرگار و خط کش حل شده اند. در «مقدمات» اقلیدس، به تقریب همه مساله های ساختمانی که امروز در دبیرستان مطرح می شود، حل شده است.

محاسبه مساحت شکل های روی صفحه که با پاره خط های راست محدود شده اند.

به کوتاهی تاریخ محاسبه شکل های روی صفحه را که با پاره خط های راست محدود شده باشند، درآوریم (مستطیل، مثلث، متوازی الاضلاع و ذوذنقه). مفهوم مساحت شکل های هندسی به دوران کهن بر می گردد. نزدیک به دو هزار سال پیش از میلاد مردم سرزمین بابل می توانستند مساحت مستطیل، ذوذنقه و مثلث را پیدا کنند. مردم عیلام و مصر هم در سده هفدهم پیش از میلاد، با روشی هنرمندانه مساحت مستطیل را به دست می آوردند. در عیلام، مساحت مثلث متساوی الساقین را به تقریب نصف حاصلضرب قاعده در یک ساق به شمار می آوردند. مصری ها مساحت ذوذنقه را هم به تقریب محاسبه می کردند. آنها برای محاسبه مساحت ذوذنقه متساوی الساقین، مجموع دو قاعده را در نصف ساق ضرب می کردند. روشن است که این ذوذنقه در پاپیروس رایند داده شده است. این مسأله را می آوریم. « اگر قطعه زمینی به شما داده باشند که ضلع های دو طرف آن هر یک 20 « خت » و قاعده های آن 6«خت» و 4 «خت» باشد

مساحت آن چه قدر است؟ » این مسأله به این صورت حل شده است: $\frac{1}{2}(4+6)20=100$

مساحت چهارضلعی ها را در عیلام، بابل و مصر به این ترتیب به دست می آوردند که نصف مجموع دو ضلع روبه رو را در نصف مجموع دو ضلع روبه روی دیگر ضرب می کردند. چون قطعه زمین ها به مستطیل نزدیک بود، در این محاسبه اشتباهی پدید نمی آمد.

قضیه فیثاغورس

درباره زندگی فیثاغورس آگاهی زیادی نداریم. به ظاهر در سال های 580-500 پیش از میلاد می زیسته است. به ظاهر در جزیره « ساموس » به دنیا آمد. در جوانی برای کسب علم از کاهنان، مدت بیست سال را در ایران و بابل و مصر گذارند. در این جاها نزد مغان ایرانی، کاهنان بابلی و مصری، اخترشناسی و دانش های دیگر آموخت؛ به طوری که شهرت دارد که « فیثاغورس، دانش مغان را آموخته بود. » از جمله او معتقد به حرکت زمین بود. خورشید را در مرکز عالم می دانست و این همان آموزش مغان ایرانی بود.

او سپس به زادگاه خود بازگشت و در جنوب ایتالیا در سیسیل اقامت کرد و مکتب فیثاغورس را بنیان گذاشت که خدمت های زیادی به دانش های ریاضی و اخترشناسی کرد. با وجود این، فیثاغورس کمیت های مادی را از واقعیت وجودی آنها جدا کرد و به این ترتیب، از دنیای واقعی جدا شد و مکتبی با نظریه ایده آلیستی بنیان گذاشت. مکتب فیثاغورش از دیدگاه سیاسی، اشرافیت برده داری زمان خود تأیید می کرد و سیاستی ارتجاعی داشت. فیثاغورس درباره شکل

های هندسی و ویژگی های آنها خیلی کار کرد. بجز قضیه ای که به نام او مشهور است، کشف

هنای دیگری دارد که از جمله اینها هستند:
1-قضیه مربوط به مجموع زاویه های درونی مثلث.
2-حل مساله مربوط به بخش کردن صفحه به چند ضلعی های منتظم (مثلث متساوی الاضلاع، مربع و شش ضلعی منتظم)
3-حل هندسی معادله درجه دوم
4-قاعده حل این مساله: « با در دست داشتن دو شکل، شکلی بسازید که با یکی برابر و با دیگری متشابه باشد. » افتخار بزرگ فیثاغورس را در کشف رابطه ای می دانند که بین طول ضلع های مثلث قائم الزاویه وجود دارد و در هر گام هندسه، از آن استفاده می کنند. حالت های خاص این قضیه را پیش از فیثاغورس و در سرزمین دیگر هم می دانستند از جمله مصری ها در ساختمان های خود و برای رسم دو خط راست عمود بر هم از مثلثی با ضلع هایی به طول 3،4 و 5 استفاده می کردند.

مصری ها می دانستند که مثلث با ضلع هایی به طول 3،4 و 5 یک مثلث قائم الزاویه است و رابطه: $3^2+4^2=5^2$ بین طول ضلع های آن برقرار است. به جزآن، عیلامی ها و بابلی ها به ظاهر از این رابطه بین ضلع های مثلث قائم الزاویه اطلاع داشتند ودر نوشته های میخی آنها گونه هایی از مثلث قائم الزاویه با تعیین طول ضلع آنها وجود دارد. هندی ها هم از حالت های خاص قضیه فیثاغورس استفاده می کردند؛ در ضمن این قضیه را روی شکل نشان می دادند. اثبات خود فیثاغورس به ما نرسیده است. ریاضیدان و تاریخ نویس آلمانی « م. کانتور » (1829-1920) معتقد است که فیثاغورس این قضیه را روی مثلث قائم الزاویه متساوی الساقین ثابت کرده است و
شبیه هندی ها با شکل آن را توضیح داده است. امروز بیش از صد اثبات برای قضیه فیثاغورس

وجود دارد و چه بسا یکی از این راه ها را خود فیثاغورس رفته باشد.

شرح حال کوتاهی از ارشمیدس

اندازه گیری طول پاره خط های راست و مفهوم کلی اندازه گیری مقدارها بر «اصل ارشمیدس» قرار دارد. به جز این، ارشمیدس نخستین کسی بود که درباره عدد π و محاسبه محیط دایره اندیشید و راه محاسبه ی آن را به یاری چند ضلعی های منتظم محاط در دایره و محیط بر دایره پیدا کرد. او مقدار تقریب عدد π را $\frac{22}{7}$ می گرفت. در اینجا شرح حال و کارهای ارشمیدس به کوتاهی آمده است.

از زندگی ارشمیدس تنها از تکه هایی اطلاع داریم که به وسیله تاریخ نویسان باستانی « سیسرون » و « پلوتارک » و دیگران برای ما مانده است. می دانیم ارشمیدس در سال 287 پیش از میلاد در سیسیل زاده شد و در 75 سالگی، وقتی که رومی ها شهر سیراکوز را گرفتند، در سال 212 پیش از میلاد کشته شد. زندگی ارشمیدس با افسانه آمیخته است، که در اینجا برخی از آنها را می آوریم.

روایت می کنند وقتی ارشمیدس به ریاضیات می پرداخت حتی گرسنگی را از یاد می برد. در این باره همیشه مستخدم به او یادآوری می کرد. برای نمونه، وقتی در وان حمام نشسته بود با فراموش کردن مکان خود، با رسم شکل های هندسی به کمک آب صابون روی مساله ای می اندیشید. در این هنگام مستخدم آمد و همه شکل های هندسی را از بین برد.

سیسرون درباره مرگ ارشمیدس چنین می نویسد: در موقع جنگ سیراکوز ارشمیدس روی زمین نشسته بود و روی یک شکل هندسی که روی زمین کشیده بود، می اندیشید . او

غرق یک مساله دشوار هندسی بود و توجهی به جنگی که در اطراف او ادامه داشت، نمی کرد. او به دست یک سرباز رومی در برابر تنها یک جمله کشته شد: « به این شکل دست نزن !». بنابر روایت دیگری که « زوناراس » (سده دوازدهم) می آورد: ارشمیدس فقط فریاد کشید: « هر چه می خواهی بکن، تنها به شکل دست نزن ! » باز روایت دیگری درباره ارشمیدس؛ شاه سیراکور(هیه رون) به یک استاد جواهر ساز دستور داد تاجی برای او درست کند و مقداری طلا در اختیار او گذاشت. استاد جواهر ساز سفارش را انجام داد در ضمن مقداری طلا را با نقره هم وزن آن عوض کرد. شاه به استادکار بدگمان شد و به ارشمیدس مراجعه کرد تا مقدار طلایی که در تاج به کار رفته است، معین کند.

ارشمیدس وقتی که در حمام داخل وان نشسته بود. کلید حل مساله را یافت و در همان زمان برهنه به خیابان دوید و فریاد زد: « یافتم ، یافتم » در وان متوجه این قانون شد که هر جسمی که در آب غوطه ور باشد، به اندازه آب هم حجم آن سبک تر می شود؛ قانونی که به « قانون ارشمیدس» معروف است.

ارشمیدس دو سال تمام با ماشین هایی که خود ساخته بود از سیراکوز در برابر هجوم رومی ها دفاع کرد. فرمانده رومی ها « مارک کلاودیوس مارسل» بزرگترین جنگاور آن زمان بود. پلوتارک تسخیر سیراکوز به وسیله رومیان را شرح می دهد: «مارسل به فراوانی و مهارت ارتش خود و به افتخارهای شخصی خودش، اعتماد کامل داشت؛ ولی همه چیز در برابر ارشمیدس و ماشین او ناتوان ماند . . . » ارشمیدس از خویشان نزدیک « هیه رون » پادشاه وفات یافته بود. او در زمان خودش به « هیه رون » نوشت، با نیروی اندکی می توان جسم سنگینی را به حرکت درآورد؛ از این گذشته او امید داشت

بتواند این مطلب را ثابت کند. او حتی می گفت می تواند زمین را به حرکت درآورد به شرطی که جایی وجود داشته باشد که به آن تکیه کند. («به من جای ایستادن بدهید تا زمین را به حرکت درآورم»). هیه رون از این موضوع شگفت زده شد و به ارشمیدس پیشنهاد کرد این مساله را ثابت کند و جسم سنگینی را با نیروی اندکی به حرکت وا دارد. ارشمیدس آزمایش را روی یک کشتی باری که سه دکل داشت، انجام داد تا مردم بیشتری بتوانند ببینند.

ارشمیدس عده ای از مردم را درون کشتی فرستاد و در ضمن، آن را پر از بار کرد. سپس در نقطه ای دور از کشتی قرار گرفت و بدون هیچ زحمتی، به سادگی دست خود را روی چیزی فشار داد

و کشتی به حرکت درآمد. هیه رون از ارشمیدس خواست . . . وسیله ای بسازد که بتواند در زمان

محاصره ی شهر به کار آید . . .

وقتی رومی ها از راه زمین و دریا، حمله را آغاز کردند، اهالی سیراکوز گمان می کردند که نمی توان جلوی این نیروی عظیم جنگی را گرفت. آن وقت ارشمیدس ماشین خود و دیگر ابزارهایی را که آماده کرده بود، به کار انداخت. در خشکی و به سمت ارتش زمینی، سنگ های بزرگ و پر حجمی با سرعتی باور نکردنی و پشت سر هم پرتاب می شد. ارتش زمینی دشمن هراسناک پراکنده شد. در همین زمان، باران سنگ های پر حجم بر کشتی فرود آمد و آن را کج کرد، یکی از کشتی های به ژرفای دریا رفت، کشتی دیگر را به هوا بلند کرد و سپس به دریا انداخت.

در همین زمان ماشین های دیگری صخره هایی از دیوارهای شهر را به طرف کشتی پرتاب می کردند و ملوانان کشتی ها را در هراس بی اندازه نابود می کردند . . . رومی

ها وحشت زده به اینجا و آنجا می دویدند و فریاد می زدند. ارشمیدس با ماشین خود آنها را از جایی به جای دیگر فراری می داد. مارسل با دیدن این وضع ، فرمان توقف جنگ و حمله را داد و برای مدتی از آنجا دور شد.

وقتی مارسل از دسترس پیرمرد (ارشمیدس) دور شد، ارشیدس آیینه های شش گوش خود را به کار انداخت. در فاصله ای از آینه اول، آیینه کوچکتری گذاشت. این آیینه ها دور خود می چرخیدند. آن وقت ارشمیدس آیینه های خود را به طرف خورشید گرفت. در نتیجه، حریق وحشتناکی کشتی ها را فرا گرفتو این، به همان اندازه پرتاب سنگ، بلکه بیشتر خطر آفرین بود. این روایت را تا مدتها غیر واقعی می پنداشتند. تا این که در سال 1777 میلادی بوفن با آزمایش نشان داد که این کار عملی است. او با استفاده از 168 آیینه و از فاصله 45 متری توانست چوب را آتش بزند. این نوشته ها از ارشمیدس به ما رسیده است:

1-دو کتاب درباره کره و استوانه 2- اندازه گیری محیط دایره 3- درباره کونوئیدها و سته روئیدها 4- درباره اسپیرال ها 5- دو کتاب درباره هم ارزی مساحت ها 6- محاسبه دانه های شن 7- به مربع درآوردن سهمی 8- نامه اراتئوستن 9- دو کتاب درباره جسم های شناور 10- قطعه ها

ارشمیدس در طرح مبحث های آنالیز ریاضی، در محاسبه طول منحنی ها، سطح شکل ها و حجم ها بر ریاضیدانانی که در سده شانزدهم دنبال کار را گرفتند، تقدم دارد.

وایرشتراس و س . و . کووالوسکایا

ضمن عبور به بحث محیط دایره و مساحت دایره، باید قضیه « وایرشتراس» درباره محیط دایره به عنوان حد دنباله بی پایان صعودی در ابتدا بدون اثبات به دانش آموزان یادآوری شود. اثبات مطلب را می توان به صورت کار

خارج از کلاس مطرح کرد. بجز این، معلم باید کوتاه شده زندگی و فعالیت های وایرشتراس و کووالوسکایا را به شرطی که در درس های جبر نیامده باشد، مطرح کند. می توان ضمن درس به وایرشتراس و شاگردش « س. و. کووالوسکایا» اشاره کرد و بحث مفصل تر در این باره را به خود دانش آموزان واگذاشت.

وایرشتراس (1815–1897) ریاضیدان مشهور آلمانی است. در دوره جوانی تحصیل خود را در بن، در رشته قضایی و در مونستر، دانش ریاضی را با موفقیت به پایان رسانید. کار خود را تدریس در دبیرستان آغاز کرد که به مدت سیزده سال از سال **1842** تا **1855** طول کشید.

از سال **1856** به دانشگاه برلن دعوت شد و به عنوان استاد ریاضیات، به دانشجویان درس می داد.

وایرشتراس با فروتنی ای که داشت در کار چاپ نوشته های خود عجله نداشت و با دقت آنها را آماده می کرد.

او جست و جوهای ریاضی خود را اغلب با دانشجویان در میان می گذاشت و

انگیزه ای برای بیداری علاقه آنها می شد. به این ترتیب نوشته های علمی وایرشتراس بی آنکه

چاپ شوند بر همگان آشکار بود.

شگفتی ندارد که بیشتر نوشته های بکر و تازه وایرشتراس پس از مرگ او چاپ شد. درس ها و مقاله های وایرشتراس بیشتر مربوط به ریاضیات عالی می شود.

از میان شاگردان ویراشتراس یکی هم ریاضیدان زن روس سوفیا ولسی لوناکوالووسکایا (1850–1891) بود. در آن زمان، زنان را به دانشگاه راه نمی دادند، دانشگاه برلن هم او را نپذیرفت؛ ولی ویراشتراس کووالوسکایا را در منزل خود پذیرفت. در آغاز او کووالوسکایا را با دشواری می پذیرفت و برای این که از شر او راحت شود، چند مساله دشوار ریاضی به او داد؛ ولی سوفیا

در یک ساعت همه مساله هایی را که به او داده شده بود، حل کرد. پس از آن، کووالوسکایا شاگرد مورد علاقه وایرشتراس شد، که مدت چهار سال پیش او آموزش گرفت.

کووالوسکایا خیلی زود همه شاخه های ریاضیات عالی را فرا گرفت و به دانش مکانیک پرداخت. او بجز ریاضیات و مکانیک، نویسنده هم بود. درام « مبارزه به خاطر خوشبختی » از او است. او زندگینامه خود را تنظیم کرد و چند داستان و یک رشته شعر دارد.

تاریخچه عدد π

تاریخ عدد π به محاسبه محیط و مساحت سطح دایره مربوط می شود. مصری های زمان های دور از ما، از عدد π برای حل مساله هایی که در زندگی به کار می رفت، استفاده می کردند. از متون قدیمی هم استنباط می شود که مردم سرزمین باستانی بابل هم عدد π را برابر 3 می گرفتند. این مقدار عدد π با توجه به اقتصاد آن روزگار، برای مصری ها وبابلی ها کافی بود و به دقت بیش از آن نیاز نداشتند. با پیشرفت نیروی تولید، دقت بیشتری برای عدد π لازم بود و از جمله مصری ها مساحت دایره ای را که قطر آن برابر D باشد با این دستور محاسبه می کردند:

$$\left(\frac{8}{9}\right)^2 D^2$$

که از آنجا برای عدد π به دست می آید:

$$\pi = \frac{266}{81} \approx 3/1605$$

این مقدار عدد π مربوط به سده نوزدهم پیش از میلاد است که پاپیروس مسکو آمده است. مقدار دقیق تر عدد π

را در سده سوم پیش از میلاد ارشمیدس یافت. بنابر محاسبه او:

$\pi = \frac{22}{7}$ (عدد ارشمیدس)

بنابر محاسبه ارشیدس، مقدار دقیق تر عدد π را باید اینگونه به حساب آورد:

$$3\frac{10}{71} \langle \pi \langle 3\frac{1}{7}$$

آپولونیوس (سده سوم پیش از میلاد) و بتلمیوس (سده دوم پیش از میلاد) ریاضیدانان یونان باستان، مقدار دقیق تری را برای π یافتند. بتلمیوس برای عدد π این مقدار را می دهد: $\pi = \frac{377}{120} \approx 3/1416$

موفقیت های بالاتر در زمینه محاسبه رقم های بیشتری برای عدد π را دانشمندان ایرانی یافتند. انگیزه آنها در این راه تشکیل جدول های اختر شناسی و مثلثاتی بود. در سده نهم میلادی خوارزمی برای عدد π این مقدارهای تقریبی را در نظر گرفت:

$$\pi = \sqrt{10}, \pi = 3\frac{1}{7}, \pi = \frac{62832}{2000}$$

سپس بعدها در سده پانزدهم میلادی جمشید کاشانی در رساله ای که درباره دایره نوشت (رساله المحیطیه) عدد π را با **16** رقم درست پس از ممیز یافت. براهماگوپتا، ریاضیدان هندی سده هفتم میلادی، برای π این عدد را انتخاب کرد:

$$\pi = \sqrt{10}$$

در سده سیزدهم میلادی فیبوناچی ایتالیایی، با روش ارشمیدس این مرزها را برای π به دست آورد:

$$1400:458\frac{1}{5}\langle\pi\langle1440:455\frac{4}{5}$$

ویت، ریاضیدان فرانسوی سده شانزدهم عدد πرا با کمک چند ضلعی های منتظم با **251658240** ضلع تا **10** رقم دهدهی پیدا کرد. بنابر محاسبه او عدد πدر این محدوده قرار دارد:

3/145926535<π<3/14159261536

سپس « رومن » هلندی در همین سده، عدد π را تا **15** رقم دهدهی از روی چند ضلعی های منتظم و محیطی که **251658240** ضلع داشتند، بدست آورد. سپس رودلف اهل کلن در آغاز عدد πرا تا **20** رقم دهدهی و بعد تا **25** رقم دهدهی پیدا کرد. این است رقم هایی که او بدست آورد:

π = **3/1415926535897932384664338327950288**

این عدد را عدد «رودلف » می گویند.

ریاضیدانان سده های **18** و **19** عدد π را با رقم های بسیار بیشتری محاسبه کردند که در عمل به کار نمی آید و برای این بود که ببینند آیا قانونی بر رقم های آن جاری است.

لامبرت (**1728-1777**) ریاضیدان آلمانی در سال **1761** گنگ بودن عدد πرا ثابت کرد. لژاندر (**1752-1833**) ثابت کرد که مجذور πهم عددی گنگ است. سرانجام لیندمان ریاضیدان آلمانی، غیر جبری بودن عدد π را ثابت کرد؛ یعنی نمی تواند ریشه یک معادله جبری با ضریب های گویا باشد.

پیدایش اصل، قضیه و تعریف

« اصل » در هندسه، به حکمی گفته می شود که بدون اثبات پذیرفته شود؛ در واقع درستی آن با تجربه سده

های متوالی تأیید می شود. حکم هایی که به یاری اصل ها ثابت می شوند «قضیه» نام گرفته اند. اثبات، عبارت از استدلالی است که به یاری آن و به یاری اصل ها، می توان قضیه را ثابت کرد. قضیه، ترجمه ای است از واژه یونانی « ته ئورم » که به معنای « اندیشیدن » است.

اصل ها و قضیه ها را برای نخستین بار دانشمندان یونانی وارد دانش کردند. ارشمیدس (سده سوم پیش از میلاد) در کتاب های خود بارها از اصل و قضیه استفاده کرده است. تا سرانجام اقلیدس (سده سوم پیش از میلاد) در « مقدمات » خود در سیزده کتاب اصل ها و قضیه های هندسی را منظم کرده است.

اقلیدس سه سده پیش از میلاد و به دعوت بطلمیوس اول، در اسکندریه هندسه درس می داد. بنابر آگاهی پروکلس، مورخ ریاضیات شاه (بطلمیوس اول) از اقلیدس می خواهد تا راهی ساده تر و نزدیکتر برای یادگرفتن هندسه ارائه دهد.

اقلیدس پاسخ می دهد: « در هندسه، شاهراه وجود ندارد. » (اشاره به شاهراهی است که بطلمیوس را به قصر خود می رسانید .) همچنین نقل می کنند وقتی یکی از شاگردان از اقلیدس

می پرسد: « از یاد گرفتن هندسه چه سودی به او می رسد؟ اقلیدس به برده خود اشاره می کند و

می گوید : « چیزی به این مرد بدهید؛ او انتظار دارد از هندسه چیزی عایدش شود. »

برخی از اصل ها را اقلیدس « پوستولا» (خواست) نامیده است. برای نمونه، نخستین پوستولا در « مقدمات » اقلیدس به این ترتیب تنظیم شده است: « دو نقطه را می توان به وسیله خط راست به هم وصل کرد. » به ظاهر پوستولاهای اقلیدس ویژه هندسه است. او اصل هایی را

که عمومی ترند و در دانش های دیگر هم به کار می روند « آکسیوم » می نامد. امروز همه اصل ها (آکسیوم ها و پوستولاها) را «آکسیوم » می نامند که در زبان فارسی، به « اصل موضوع » معروف اند.

هه رون اسکندرانی و دستور محاسبه مساحت مثلث

در دبیرستان دستوری برای محاسبه مساحت مثلث به نام « دستور هه رون » وجود دارد. این دستور مساحت مثلث را به کمک سه ضلع آن می دهد. اگر a،b و c طول ضلع های و p نصف محیط مثلث باشد « دستور هه رون » چنین است :

$$S = \sqrt{P(P-A)(P-B)(P-C)}$$

این دستور به افتخار « هه رون اسکندرانی » که در اسکندریه در حدود سده اول پیش از میلاد می زیسته است، دستور هه رون نامیده می شود. درباره زندگی هه رون، آگاهی های پراکنده ای داریم. می دانیم، او در زمان خود دانشمند و مهندس مشهوری بوده است. کار اصلی او نقشه برداری و مساحی (ژهئودزی) بود.

در یکی از کتاب های خود نقشه زمین ها را مطرح می کند که در واقع در آن از مختصات قائم استفاده کرده است. هه رون در همین کتاب، اسبابی را شرح می دهد که بسیار به تئودولیت (زاویه یاب) امروزی شباهت دارد. این وسیله از خط کشی به طول چهار ارش با صفحه هایی نه چندان بزرگ در دو انتها ساخته شده است. این خط کش روی صفحه ای گرد قرار داشت که می شد آن را در جهت افقی یا قائم حرکت داد. هه رون به یاری ابزارهایی که خودش ساخت این مساله ها را حل کرد:

1-فاصله بین دو نقطه ای که تنها به یکی از آنها می توان دسترسی داشت؛
2- فاصله بین دو نقطه ای که آنها را می توان دید، ولی به هیچ کدام نمی توان دسترسی داشت
3-رسم عمود به خط راستی که در دسترس نیست؛
4-یافتن اختلاف سطح دو نقطه؛
5- محاسبه مساحت یک میدان، بدون اندازه گیری های مربوط به آن.
هه رون آگاهی های ریاضی خود را در یک فرهنگ ریاضیات کاربردی تنظیم کرد.
نوشته های ریاضی هه رون تا دوران نوزادی (رنسانس) تأثیر زیادی در پیشرفت ریاضیات و کاربردهای آن داشت.

حل مثلث

مثلثات در آغاز تحت تأثیر اخترشناسی و نقشه برداری، روی مثلث کروی تکامل یافت. همراه با آن ، مثلثات درباره مثلث های مستقیم الخط هم به وجود آمد. نظریه مربوط به مثلث های کروی در کارهای ابوالوفای بوزجانی و ابوریحان بیرونی داده شد و سرانجام نصیر الدین طوسی در سده سیزدهم میلادی در کتاب « کشف القناع» خود گونه های مختلف مثلث کروی را در فصل های ششم و هفتم کتاب خود آورد.
در واقع طوسی مثلثات را به عنوان دانشی مستقل معرفی کرد. در اروپا برای نخستین بار رابطه های مثلثاتی را « رگیومونتان » در سده پانزدهم میلادی در رساله «درباره مثلث از هر گونه ای » که درسال **1533** یعنی **57** سال پس از مرگ او منتشر شد، آورد. پس از رگیومونتان، ریاضیدانان به سادگی توانستند حل مثلث با زاویه های حاده را بدهند.

محاسبه حجم منشور و هرم

این تاریخچه کوتاه، باید پس از آنکه برای دانش آموزان چند وجهی ها توضیح داده شد و حجم هرم و هرم ناقص را دانستند ، بیاید. تاریخ محاسبه حجم منشور و هرم بسیار جالب است. به نظر می رسد که نیاز به محاسبه و تنظیم این دستورها، به دورانی بسیار دور از ما می رسد. برای نمونه این دستورها را بابلی های باستان برای محاسبه مقدار مصالحی که برای ساختمان های خود و همچنین برای محاسبه گنجایش ظرف ها، حوضچه ها و . . . لازم داشتند، پیدا کردند. بابلی ها در روش محاسبه ای خود، بسیار پیشرفته بودند. آنها می توانستند حجم مکعب مستطیل و هرم ناقص را به درستی محاسبه کنند. (هرم های ناقص با قاعده مربعی) درباره حجم هرم، از قاعده هایی استفاده می کردند که با نمادهای امروزی می توان این طور نشان داد:

$$V = h\left[\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{a-b}{2}\right)^2\right]$$

که پس از ساده کردن به این صورت درمی آید:

$$V = \frac{h}{3}\left(a^2 + b^2 + ab\right)$$

ولی تا امروز معلوم نشده است چگونه به این دستور رسیده اند. مصری ها هم می توانستند حجم منشور و هرم را بدست آوردند. مصری ها برای ساختمان های خود که هرم های آنها با ظرافت و هنرمندی جای خاصی در بین ساختمان ها داشتند به محاسبه این حجم ها نیاز داشتند به فرمان فرعون باید هرم ها با اندازه های بزرگ ساخته می شد.

برای نمونه هرم « خئوپس » قاعده ای به شکل مربع داشت به ضلع برابر **233** متر و ارتفاعی برابر **147** متر.

برای ساختن این هرم، قریب 2300000 قطعه سنگ گرانیت به کار رفته است که وزن هر قطعه سنگ، 2/5 تن بوده است. کار ساختمان با کیفیتی بسیار بالا انجام گرفته است. قطعه های عظیم سنگ را صاف می کردند، صیقل می دادند و با دقت کامل به هم جفت می کردند. ساختمان های عظیم هرم ها را مردم بی چیز کشور انجام می دادند؛ کسانی که سطح زندگی آنها بسیار پایین بود.

در پاپیروس مسکو کهن ترین نوشته ریاضی درباره محاسبه حجم هرم با قاعده مربعی وجود دارد. این مساله به این گونه مطرح شده است: مطلوب است حجم یک هرم ناقص به ظرطی که ارتفاع آن برابر 6، ضلع قاعده پایین هرم برابر 4 و طول قاعده بالای آن برابر 2 باشد. یادآوری این مطلب جالب است که این پاپیروس در سال 1893 پیدا و در سال 1912 به موزه هنرهای زیبا مسکو منتقل شد. این پاپیروس، طولی برابر 544 سانتیمتر و عرضی برابر 8 سانتیمتر دارد. برای

نخستین بار به وسیله « و . و . سترووه » کشف و خوانده شد. مساله ای که در اینجا درباره هرم

ناقص آوردیم ، با این دستور حل شده است: $V\frac{h}{3}\left(B+b+\sqrt{Bb}\right)$

در واقع طبق این دستور برای مساله به دست می آید:

$$V=\frac{6}{3}\left(16+4+\sqrt{16\times 4}\right)=56$$

البته مصری ها از فرمول استفاده نمی کردند؛ ولی این دستور را در هر حالت جداگانه به درستی به کار می بردند. در اینجا مساله را با روشی که در پاپیروس حل شده است، می آوریم: « مساله درباره هرمی است (در متن شکلی وجود دارد.) که اگر گفته می شد: 4 در پایین و 2 در بالا مجذور 4 می شود 16؛ 4 را دو برابر می کنیم

می شود 8. مجذور 2 می دهد 4. جمع می کنیم 16 را با 8 و با 4 می شود 28. آن طور که معمول است عمل می کنیم؛ دو برابر 28 را به دست می آوریم، 56 می شود. همین 56 است که تو توانسته ای مساله را به درستی حل کنی. »

چند وجهی های منتظم

چند وجهی های منتظم پس از چند ضلعی های منتظم می آیند. اینک کوتاه شده ای از تاریخ پیدایش چند وجهی های منتظم. چند وجهی های منتظم (چهار وجهی منتظم، هشت وجهی منتظم، مکعب، دوازده وجهی منتظم و بیست وجهی منتظم) را هواداران فیثاغورس کشف کردند و امروز به نام « پنج جسم افلاتونی » مشهورند. بنابر فلسفه فیثاغورس چهار وجهی نخستین، معرف چهار « عنصر » یعنی آتش ، باد، خاک و آب بود. به دلیل ابنکه عنصر پنجم وجود نداشت، فیثاغورسی ها چند وجهی منتظم پنجم (دوازده وجهی منتظم) را پنهان نگه می داشتند. رسم چند وجهی منتظم در دانش ریاضیدانان یونان باستان دیده نمی شود. اقلیدس درباره چند وجهی منتظم در کتاب سیزدهم « مقدمات » خود به تفصیل بحث کرده است.

جسم هایی که از دوران به دست می آیند

در دوران کهن، مصری ها و بابلی ها به جسم های دوار توجه داشتند. از جمله پاپیروس مسکو را ملاک قرار دهیم، مصری ها در سده نوزدهم پیش از میلاد می توانستند مساحت نیمکره را محاسبه کنند. این مساله به نام « محاسبه زنبیل » آمده است. اگر به تو بگویند:

دهانه زنبیلی $4\frac{1}{4}$ است، به من بگویید مساحت آن چه قدر است؟ » مساله با این دستور حل شده است:

$$2\times\left(\frac{8}{9}\right)^2\times\left(4\frac{1}{2}\right)^2$$

این دستور برای محاسبه مساحت نیمکره است؛ به شرطی که قطر را برابر بگیریم و عدد π را :

$$\pi = 4\times\left(\frac{8}{9}\right)^2 \approx 3/16$$

به حساب آوریم. در یونان تنها ارشمیدس بود که به محاسبه حجم جسم های دوار پرداخت. او از روش خاص خود استفاده می کرد و دستورهایی برای همه این گونه جسم ها به دست آورد. ارشمیدس این قضیه را ثابت کرد: « سطح کره برابر است با چهار برابر مساحت دایره عظیمه؛ حجم استوانه ای که ارتفاع آن برابر قطر قاعده باشد، یک برابر و نیم حجم کره محاط در آن است. »

شکل مربوط به این مساله را طبق وصیت او روی سنگ آرامگاهش حکاکی کرده اند. اما آنچه به اقلیدس و شاگردان او مربوط است، آنها تنها محاسبه نسبت حجم ها و نه خود آنها را داده اند.

نیکلای ایوانوویچ لباچوسکی و هندسه او

پس از شکل های دوار خوب است دانش آموزان را با زندگی لباچوسکی و فعالیت ها او و طرح عینی و ساده ای از هندسه او آشنا کنیم. نیکلای ایوانوویچ لباچوسکی (1792–1856) در کوه متولد شد. پدرش کارمند دولت و مساح زمین بود. او خیلی زود پدرش را از دست داد. مادرش، زنی عاقل و پر انرژی بود و پسرش را

ابتدا به دبیرستان «قازان » و وقتی دبیرستان را تمام کرد به دانشگاه قازان فرستاد. موفقیت های درخشان او در ریاضیات خیلی زود نظر استادان را به خود جلب کرد. بازرسی دانشگاهی را لباچوسکی دوست نداشت؛ زیرا با خصلت مستقل او نمی ساخت و در چارچوب اخلاق آن زمان جا نمی گرفت.حتی مسأله اخراج لباچوسکی از دانشگاه مطرح شد و اگر استادش در این کار دخالت نمی کرد، او را از دانشگاه اخراج کرده بودند. بجز این، پافشاری استادان ریاضی درباره استعداد لباچوسکی و پافشاریی که در دفاع از لباچوسکی در برابر ریاست دانشگاه کردند، موجب شد او در دانشگاه برای فعالیت های علمی و تربیتی بماند. لباچوسکی مرحله های دانشگاهی را با موفقیت گذراند. در هجده سالگی در رشته فیزیک ریاضی لیسانس گرفت. برای این که بتواند فوق لیسانس خود را بگذراند لازم بود از آزمایش سخت در زمینه ریاضیات بگذرد. در 23 سالگی لباچوسکی به استادی دانشگاه انتخاب شد. در سال 1827 به ریاست دانشگاه قازان برگزیده شد و در این سمت، نوزده سال باقی ماند.

مهمترین کشف لباچوسکی، هندسه او بود. برای نخستین بار در 23 فوریه سال 1826 در نشست فیزیک-ریاضی لباچوسکی کشف خود را ارائه کرد. این روز را باید تاریخ تولد هندسه لباچوسکی دانست. او اندیشه های خود را در نشریه ای که خودش بر پا کرده بود و در مقاله های « درباره مقدمات هندسه » (1829-1830) ، « هندسه تخیلی » (1835) ، « برخی کاربردهای هندسه تخیلی » (1836) ، « مقدمات تازه هندسه به یاری نظریه موازی ها » (1835-1838) ، « بررسی های هندسی درباره نظریه موازی ها» (1840) و « هندسه » (1855) منتشر کرد.

هندسه لباچوسکی، انقلابی واقعی در ریاضیات بود.

برخی دانشمندان (از جمله کلیفورد ریاضیدان انگلیسی) او و کارش را همسان کپرنیک در اختر شناسی خواندند. ولی پروفسور«و . ف . کاگان» دانشمند شوروی، این مقایسه را ناکافی می داند. روی آرامگاه کپرنیک که در میدان نه چندان بزرگ شهر « تورنو » در لهستان واقع است، نوشته اند: « خورشید ساکن است، زمین می چرخد.» پروفسور کاگان می نویسد: « من خوشحالم اعلام کنم : حکم ساکن بودن خورشید و حکم چرخیدن زمین، ساده تر از آن است که حکم کنیم: مجموع زاویه های یک مثلث کمتر از آن است که فکر می کنیم. » (درهندسه لباچوسکی، مجموع زاویه های درونی یک مثلث، همیشه از دو قائمه کمتر است.)

لباچوسکی بدون فعالیت سخت و پرجوش و خروش درباره کاربرد هندسه خود نمی توانست درباره درست بودن نظریه خود بیندیشد. با وجود حاکمیت حال و هوای حکومت ارتجاعی تزار که نه شرایط اخلاقی مناسبی به جامعه حاکم بود و نه امکانات مادی در اختیار دانشمندان گذاشته می شد، لباچوسکی با سرسختی از اندیشه ی خود دفاع کرد؛ اندیشه ای که تنها پس از مرگ او به رسمیت شناخته شد. گوس، ریاضیدان برجسته هم عصر با لباچوسکی بود. وقتی با نظریه لباچوسکی آشنا شد، در نامه هایی که به دوستانش نوشته بود، اعلام کرد که به لباچوسکی به صورت یک مؤلف می نگرد که « درباره هندسه همچون یک خردمند بحث کرده است. » ولی نظر خود را جایی چاپ نکرد یا به خود لباچوسکی اطلاع نداد؛ در حالی که لباچوسکی تأییدیة یک ریاضیدان بزرگ را نیاز داشت.

لباچوسکی تلاش می کرد تا دانشمندان را با نظریه خود آشنا و آنها را قانع کند و برای این منظور به دنبال کاربرد هندسه ی خود بود. از جمله او به آزمایش

دلیرانه ای اقدام کرد که هندسه ی خود را با مشاهده های اخترشناسی تحقیق کند؛ او مثلثی را در نظر گرفت که رأس های آن را سه ستاره ثابت تشکیل می داد.
به یاری اندازه گیری می خواست ثابت کند که برای چنین مثلثی، مجموع زاویه های درونی کمتر از دو قائمه است. لباچوسکی حتی در سال های مصیبت و تیره روزی هم کار خود را ترک نکرد (از دست دادن کار دانشگاهی، مرگ پسر بزرگش و وخیم شدن وضع مادی زندگی). او نیروی خود را به سرعت از دست داد و در ضمن نابینا شد. در سال پیش از مرگ خود نابینا بود لباچوسکی تألیف تازه خود را به شاگردانش دیکته می کرد.
این تألیف درباره هندسه عمومی بود که در آن گفته می شد هندسه معمولی (اقلیدسی) حالت خاصی از هندسه لباچوسکی است. این اثر وقتی که دیگر نویسندة آن از دنیا رفته بود، به وسیله دانشگاه قازان چاپ شد. 24 فوریه 1856، نیکلای ایوانوویچ لباچوسکی چشم از جهان فروبست. او شاهد به رسمیت شناختن هندسة خود، از طرف ریاضیدانان نبود. نیکلای ایوانوویچ لباچوسکی مردی فعال و میهن دوستی به معنای واقعی بود. او یکی از روشنگران روسی بود. بدون این که از کارهای دانشگاهی طفره برود، مدرسه ها را بازدید می کرد. برای آنها کتاب درسی می نوشت و راه زندگی را به آنها نشان می داد. از جوانان می خواست، شهروند خوبی برای مملکت باشند « و در پی افتخار میهن خود باشند. »
لباچوسکی کتاب های درسی را در زمینه جبر و هندسه نوشت.
« دوره هندسه » را در سال 1823 با شیوه خود و بر اساس تجربه سال ها و اندیشه درباره هندسه نوشت. این کتاب، به ظاهر برای کسانی نوشته شده است که به تازگی با ریاضیات آشنا شده اند و می خواهند آگاهی و

درک خود را از هندسه بالا ببرند. به نظر لباچوسکی هندسه برای این نیست که از روی کتاب اقلیدس، همه چیز به طور انتزاعی فهمیده شود؛ بلکه برای آن است که حقیقت دور و بر خود را بهتر بشناسیم و آن را به کار بریم. لباچوسکی در کتاب درسی خود هندسه را به دو بخش روی صفحه و دورن فضا تقسیم نمی کند و هر جا مطلبی از هندسه را روی صفحه مطرح می کند، به حالت فضایی آن هم می پردازد.

کتاب لباچوسکی در زمان خودش چاپ نشد. به این امر، کهنه پرستی، جمود فکری و گذراندن مسیر اداری پیشگفتار هم کمک کرد تا چاپ این کتاب را تا سال 1909 به عقب بیندازد.

هندسه هم مانند حساب یکی از کهن ترین بخش های دانش ریاضیات است. تاریخ پیدایش آن در ژرفای سده های گذشته است. هندسه در دنیای کهن، بیشتر جنبه کاربردی داشته است و این دوران خود را ، که طولانی ترین دوران تکامل آن است در عیلام، بابل، مصر، چین و در واقع در همه سرزمین ها گذرانده است و همه ملت ها در ارتباط با اندازه گیری به ویژه اندازه گیری زمین های کشاورزی، در ساختن نخستین مفهوم های هندسی دخالت داشته اند.

در سده سوم پیش از میلاد با مقدمات اقلیدس ریاضیدان یونانی هندسه نظری زاده شد که بر آگاهی قبل (چه پیش از دوران یونانی و چه به کمک ریاضیدانان یونانی پیش از اقلیدس)تکیه داشت. اقلیدس سیزده کتاب درباره هندسه نوشت که به نام کلی مقدمات مشهور است. « مقدمات اقلیدس » تنها کتابی است که در طول نزدیک دو هزار سال پس از او، هندسه را به دیگران آموخته است. حتی امروز هم، هندسه دبیرستانی بر اساس مقدمات اقلیدس است؛ از جمله انگلستان درباره هرقضیه

به کتاب اقلیدس تکیه می شود. هندسه ای که در دبیرستان آموخته می شود، هندسه اقلیدسی نام دارد.

در طول بیش از دو هزار سال دانشمندان گمان می کردند که هندسه ای جز هندسه اقلیدسی وجود ندارد. بر اساس این تصور ریاضیدانان تلاش می کردند پوستولای پنجم اقلیدس را از دیگر اصل های موضوع نتیجه بگیرند. تغییر یافته پوستولای پنجم اقلیدس به وسیله « پولی فر» چنین می گوید: از یک نقطه بیرون از یک خط راست، نمی توان دو خط راست موازی با خط راست مفروض رسم کرد. ولی همه تلاش ها برای اثبات این موضوع ناکام ماند.

ریاضیدانان ایرانی از جمله فضل حاتم تبریزی و عمر خیام، در این راه کوشیدند؛ولی نتیجه این شد که اصل موضوع دیگری را به جای اصل موضوع اقلیدس قرار دادند. خیام در کتاب خود که به این موضوع اختصاص دارد، چهار ضلعی های دو قائمه متساوی الساقین را مطرح می کند. او از چهار ضلعی هایی صحبت می کند که دو ضلع روبه رو با هم برابر و بر قاعده عمود باشند.

بعد ابتدا ثابت می کند دو زاویه دیگر این چهار ضلعی با هم برابرند و با جانشین کردن اصل دیگری به جای پوستولای پنجم اقلیدس حاده یا منفرجه بدون دو زاویه دیگر را رد می کند. طرح خیام به وسیله نصیر طوسی به کشورهای اروپایی می رود. از جمله ساکری ریاضیدان ایتالیایی با طرح همان چهار ضلعی ها تلاش می کند اصل موضوع اقلیدس را ثابت کند؛ ولی به نتیجه ای نمی رسد. از آن جا که گوس و لباچوسکی با دنبال کردن روش ساکری، توانستند هندسه نااقلیدسی را بسازند امروز تاریخ ریاضیات این چهار ضلعی ها به « چهار ضلعی ساکری » معروف شده است؛ در حالی که بحق باید آنها را

« چهار ضلعی های خیام » نامید. دانشمند هندسه دان روسی نیکلای ایوانوویچ لباچوسکی در سال **1826** غیر قابل اثبات بودن پوستولای پنجم اقلیدس را ثابت کرد و به جای آن این حکم را گذاشت: « از هر نقطه بیرون یک خط راست، دست کم می توان دو خط راست رسم کرد که خط راست مفروض را قطع نکند. »

لباچوسکی با این فرض و پیش بردن قضیه ها امیدوار بود در جایی به تناقض برسد و در نتیجه اصل اقلیدس را با « روش برهان خلف » ثابت کرد. ولی با آن که هندسه خود را که بر اصلی متضاد با اصل اقلیدس ساخته بود، بسیار پیش برد، در هیچ جا تناقضی برخورد نکرد. از این جا لباچوسکی نتیجه گرفت که نمی توان پوستولای پنجم اقلیدس را به یاری اصل موضوع های دیگر ثابت کرد و با پذیرفتن همه اصل موضوع های اقلیدسی و نفی پوستولای پنجم آن، با جانشین

کردن اصل موضوع دیگری به جای آنها، هندسه نااقلیدسی را بنیان گذاشت. لباچوسکی بر این

اساس چند نتیجه گرفت:

1- عمود و مایلی که بر خط راست در یک صفحه رسم شوند، مکمن است یکدیگر را قطع نکنند.

2- مجموع زاویه های درونی یک مثلث بستگی به طول ضلع های مثلث دارد و از یک مثلث به مثلث دیگر تفاوت می کند؛ ولی همیشه از دو قائمه کمتر است.

3- مجموع زاویه های درونی یک چهار ضلعی کوژ (محدب)، کمتر از 4d (چهار قائمه) است و از این جا نتیجه گرفت : مستطیل وجود ندارد.

4- شکل های متشابهی که ضریب تشابهی غیر از واحد داشته باشند، وجود ندارد. برای مثلث

مفروض نمی توان مثلثی ساخت که با آن متشابه باشد، ولی برابر نباشند.

5- دایره ای که محیط بر مثلث باشد، برای هر مثلثی نمی توان رسم کرد.
6- مکان هندسی نقطه های هم فاصله نسبت به یک خط راست در صفحه خط راست نیست؛ بلکه یک خط منحنی است.
آیا هندسه لباچوسکی یک هندسه واقعی است؛ یعنی آیا با واقعیت جهان خارج تطبیق می کند؟ پیش از آن که به این پرسش پاسخ دهیم باید ببینیم از مفهوم نقطه، خط راست و صفحه ، چه باید فهمید. نقطه، خط راست و صفحه ، موضوع هایی از سه مقوله هستند که ویژگی های آنها در دستگاه اصل موضوع های هندسه، شرح داده شده است.
اصل موضوع چیست؟ آیا دستگاه اصل موضوعی درست است؟
اصل موضوع به چنان فرض های هندسی گفته می شود که بدون اثبات پذیرفته می شود و نقطه آغازی برای آشکار کردن مفهوم های نقطه، خط راست و صفحه به شمار می روند. برای نمونه می توان از یک هندسه با تعبیر « غیر عادی » نام برد که در آن «نقطه » ،کره ای به شعاع r « خط راست » استوانه بی آغاز و بی پایان به شعاع r «صفحه » به عنوان صفحه ای موازی با یک تیغه به ضخامت2r معرفی می شود.
در دبستان و دبیرستان، خط راست به عنوان « نخ کشیده » و صفحه به عنوان سطح صاف و صیقل خورده ای همچون سطح آیینه معرفی می شود. (و به این ترتیب ساده ترین تعبیر از خط راست و صفحه به عمل می آید.) ما روی صفحه کاغذ مثلثی رسم می کنیم. ضلع های آن را در تفسیر عادی، خط های راست به شمار می آوریم. اگر کاغذ خود را به صورت یک استوانه درآوریم، آنوقت ضلع های مثلث روی سطح استوانه در حالت کلی، به صورت خمیده در می آیند.
خط های روی سطح استوانه که پس از گسترش سطح استوانه ای روی صفحه به خط راست تبدیل

می شوند. « خط های ژئودزیک استوانه » نامیده می شوند. خط های ژئودزیک یک سطح، به کوتاه ترین خط هایی (از نظر طول) گفته می شود که دو نقطه از آن سطح را به هم وصل می کند.

اگر نقطه را روی سطح استوانه ای و « خط راست » را خط های ژئودزیک استوانه بگیریم آن وقت هندسه اقلیدسی درباره آنها صادق است. (درست به همان گونه صفحه معمولی) در واقع مجموع زاویه های درونی مثلث ژئودزیک برابر 2 قائمه است و این یکی از هم ارزهای پوستولای پنجم اقلیدس است. ببینیم چه هندسه ای درباره کره صادق است؛ به شرطی که « نقطه » را با نقطه های واقع بر سطح کره و « خط های راست » را خط های ژئودزیک کره در نظر بگیریم (باید توجه داشت که سطح کره را نمی توان روی صفحه گسترده و بنابراین خط های ژئودزیک آن را به خط های راست تبدیل کرد.)

خط های ژئودزیک سطح کره، کمان هایی از دایره عظیمه هستند. کمان های دایره های عظیمه، که مرکزشان در مرکز کره است، دو به دو یکدیگر را قطع می کنند بنابراین روی سطح کره « خط های راست » موازی وجود ندارند. یعنی روی سطح کره نمی توان از نقطه ای در خارج یک « خط راست» « خط راستی» موازی با آن رسم کرد.

از ویژگی های خط های ژئودزیک کره، این که اگر مثلث کروی با آنها ساخته شود، در حالت کلی، مجموع زاویه های درونی آن بیشتر از دو قائمه است. هندسه سطح کره ساده ترین نمونه یک هندسه نااقلیدسی، یعنی هندسه ریمانی است. کشف هندسه لباچوسکی یک دوره کامل را در دانش گذرانده است و در فیزیک امروزی کاربرد خود را به دست آورده است. از جمله فضای نظریه مکانیک امروزی بر اندیشه های لباچوسکی استوار است.

هندسه لباچوسکی کاربرد مستقیم خود را در نظریه تابع های با متغیر مختلط پیدا کرده است. خود

لباچوسکی از هندسه خود برای محاسبه انتگرال های معین استفاده کرده است. هندسه لباچوسکی این امکان را به وجود می آورد که به طور کامل، مساله های مربوط به سطح شبه کره را مورد مطالعه قرار دهیم و حل کنیم.